آیا R یک رابطه ترتیب است؟

۸ـ رابطه s در مجموعه اعداد حقیقی چنین داده شده است:

$$S = \{(x, y) : |x - y| < ۴\}$$

ثابت کنید S انعکاسی و متقارن است ولی متعدی نیست.

۹ـ رابطه S در مجموعه $E = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به صورت زیر داده شده است:

$$xSy \Longleftrightarrow ۴ < x^۲ + y^۲ \leq ۸$$

دامنه و برد S را یافته و نمودار آنرا رسم کنید.

دامنه و برد و نمودار هر یک از روابط زیر را معین کنید:

۱۰ـ $f = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$ ۱۱ـ $g = \{(x, y) : x = \sqrt{y}\}$

۱۲ـ $h = \{(x, x^۲) : x \in [-۱, ۱]\}$ ۱۳ـ $y = \{(|x|, x) : x \in R\}$

۱۴ـ $f = \{(x, y) : x^۲ + y^۲ < ۱\}$ ۱۵ـ $g = \{(x, y) : x^۲ + y^۲ \leq ۰\}$

وارون هر یک از روابط زیر را یافته و نمودار آنرا رسم کنید:

۱۶ـ $f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۱, ۳)\}$ ۱۷ـ $g = \{(x, y) : y = |x|\}$

۱۸ـ $h = \{(x, y) : |y| = x\}$ ۱۹ـ $r = \{x^۲, x)x :\in R\}$

۶-۲ مفهوم تابع

تعریفی را که قبلاً از تابع بخاطر دارید این است که **تابع قاعده‌ای است که به هر عنصر x از یک مجموعه (بنام حوزه تعریف یا قلمرو تابع) یک و فقط یک عنصر y از مجموعه دیگری (بنام حوزه مقادیر یا برد تابع) نظیر می‌کند.** در این قسمت، تابع را با استفاده از مفهوم مجموعه‌ها و بعنوان نوع خاصی از رابطه تعریف خواهیم نمود. قبل از هر چیز چند مثال را در نظر می‌گیریم. در سه مثال زیر فرض می‌کنیم X مجموعه انسانهای مقیم یک شهر باشد.

مثال ۱۸ : در مجموعه X رابطه r را مجموعه تمام زوجهای (x, y) می‌گیریم که x مادر y باشد، لذا r یک رابطه یک به چند است. یعنی ممکن است x هم مادر $y_۱$ و هم مادر $y_۲$ باشد یعنی: $(x, y_۲) \in r$ و $(x, y_۱) \in r$ و $(y_۱ \neq y_۲)$.

مثال ۱۹ : در مجموعه X رابطه s را مجموعه زوجهای (x, y) می‌گیریم بطوریکه y پدر x است. ملاحظه می‌شود که s یک رابطه چند به یک از X به X است.

مثال ۲۰ : در مجموعه X رابطه t را زوجهای مرتبی مانند (x, y) می‌گیریم که x فرزند y است. در این حالت t یک رابطه چند به چند از X به X است (هر x فرزند پدر و مادرش است). تابع را یک رابطه چند به یک یا یک به یک در نظر می‌گیریم، با این منظور رابطه‌های r و t تابع نیستند.

تعریف فرض کنیم Y و X دو مجموعه باشند و f یک رابطه از X به Y باشد. منظور از تابع، یک سه تایی (f, X, Y) است که در دو شرط زیر صدق کند:

الف ـ $D_f = X$.

ب ـ اگر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ آنگاه $y = z$.

به عبارت دیگر تابع **یک رابطه چند به یک یا یک به یک از X به Y است و یا رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اوّل مساوی نیستند.**

فرض کنیم f تابعی از X به Y باشد، از این ببعد بجای (f, X, Y) و $(x, y) \in f$ بترتیب نمادهای $f : X \longrightarrow Y$ و $y = f(x)$ بکار می‌بریم پس :

$$(x, y) \in f \Longleftrightarrow y = f(x)$$

از این ببعد هر تابع را که ضابطه معینی داشته باشد با $y = f(x)$ نشان می‌دهیم.

با توجه به تعریف دامنه و برد یک رابطه، دامنه و برد تابع f عبارتند از:

$$D_f = X \quad , \quad R_f = \{f(x) | \, x \in D_f\}$$

مثال ۲۱ : دمای نقطه معینی از یک شهر در یک روز معینی از ساعت ۱۱ تا ساعت ۱۸ مطابق جدول زیر داده شده است:

ساعت	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
دما	۲۵/۱۵	۲۷	۲۹	۳۰	۳۲	۳۲	۳۱	۳۰

اعداد سطر اوّل نشان دهنده ساعات است و در سطر دوّم مقدار دما. بعنوان مثال در ساعت ۱۳، دما ۲۹ درجه می‌باشد. در اینجا یک رابطه داریم که می‌توان آن را مجموعه‌ای از زوج مرتبها به صورت زیر نوشت:

$$g = \{(۱۱, ۲۵/۵), (۱۲, ۲۷), (۱۳, ۲۹), (۱۴, ۳۰), (۱۵, ۳۲), (۱۶, ۳۲), (۱۷, ۳۱), (۱۸, ۳۰)\}$$

ملاحظه می‌شود که در یک زمان معین نمی‌توان دو دمای متفاوت تصور نمود، هرچند ممکن است در دو زمان متفاوت، دمای یکسان داشت. به بیان دیگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اوّل مساوی

نیستند، هرچند ممکن است دو زوج مرتب متمایز داشته باشیم که دارای مؤلفه‌های دوّم مساوی باشند. بعنوان مثال در ساعات ۱۴ و ۱۸ دما ۳۰ درجه است یعنی:

$$(۱۴, ۳۰) \in g, (۱۸, ۳۰) \in g \quad \text{و} \quad g(۱۴) = g(۱۸) = ۳۰$$

بهرحال g یک تابع است و دامنه تعریف و برد آن عبارتند از:

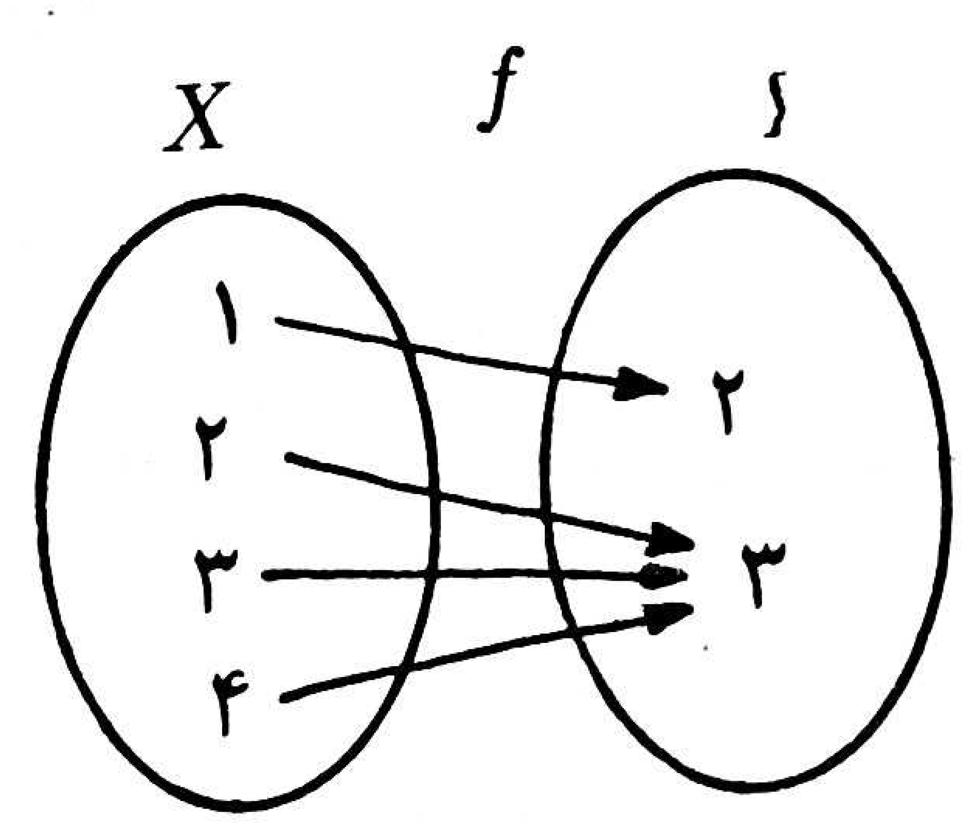
$$D_f = \{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸\}$$

$$R_g = \{۲۵/۵, ۲۷, ۲۹, ۳۰, ۳۲, ۳۲, ۳۱, ۳۰\}$$

مثال ۲۲ : فرض کنیم: $f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۳), (۴, ۳)\}$، در این صورت $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع است که در آن $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}, Y = \{۲, ۳\}$ ملاحظه می‌شود که:

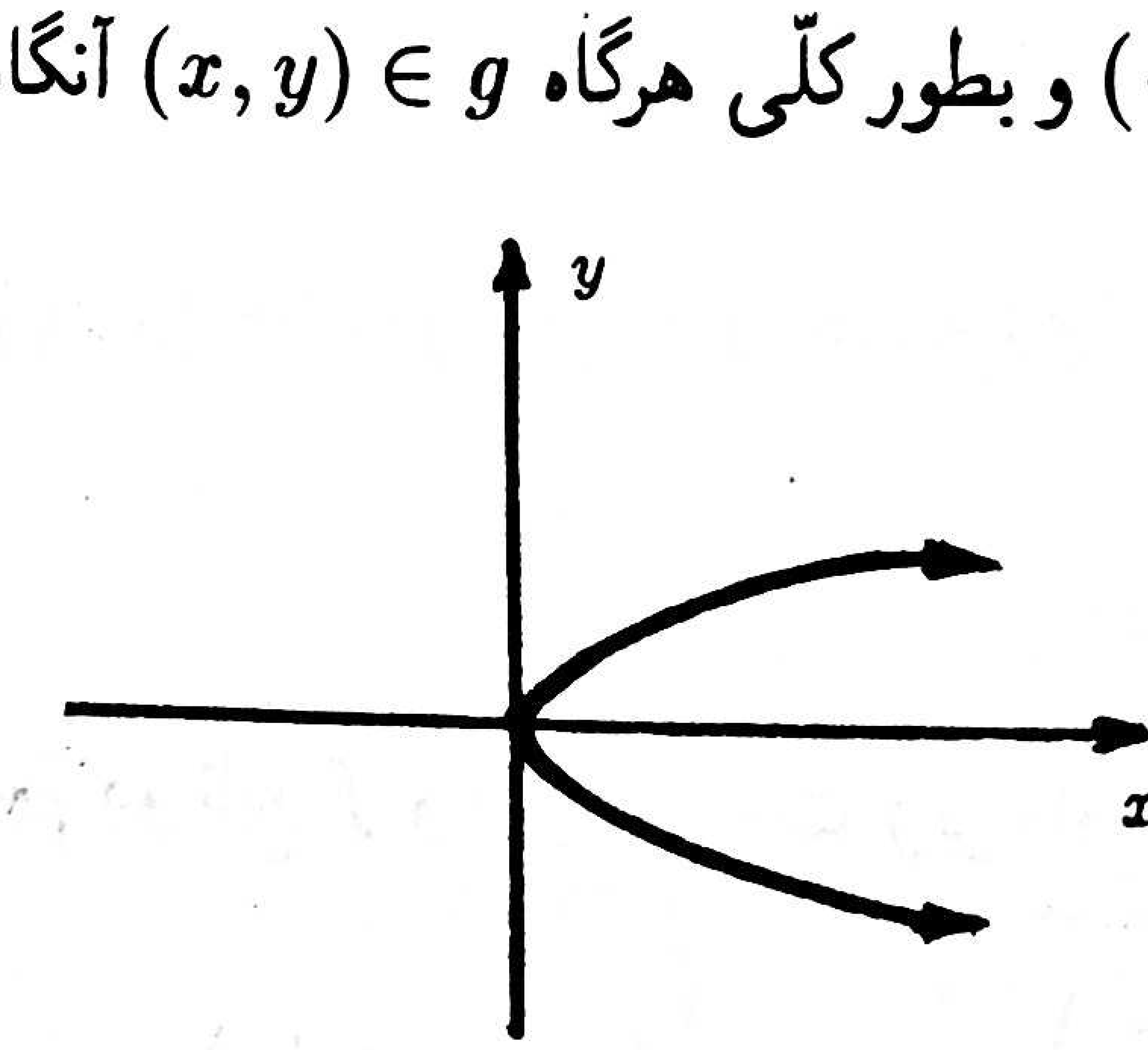
$$f(۱) = ۲ \ , \ f(۲) = ۳ \ , \ f(۳) = ۳ \ , \ f(۴) = ۳$$

و نمودار پیکانی آن چنین است:



مثال ۲۳ : فرض کنیم: $g = \{(x, y) : y^۲ = x\}$، ملاحظه می‌شود g یک تابع نیست زیرا بعنوان مثال $(\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \in g$ و $(\frac{۱}{۲}, \frac{-\sqrt{۲}}{۲}) \in g$ و بطور کلّی هرگاه $(x, y) \in g$ آنگاه $(x, -y) \in g$. نمودار g در شکل زیر نشان داده شده است:

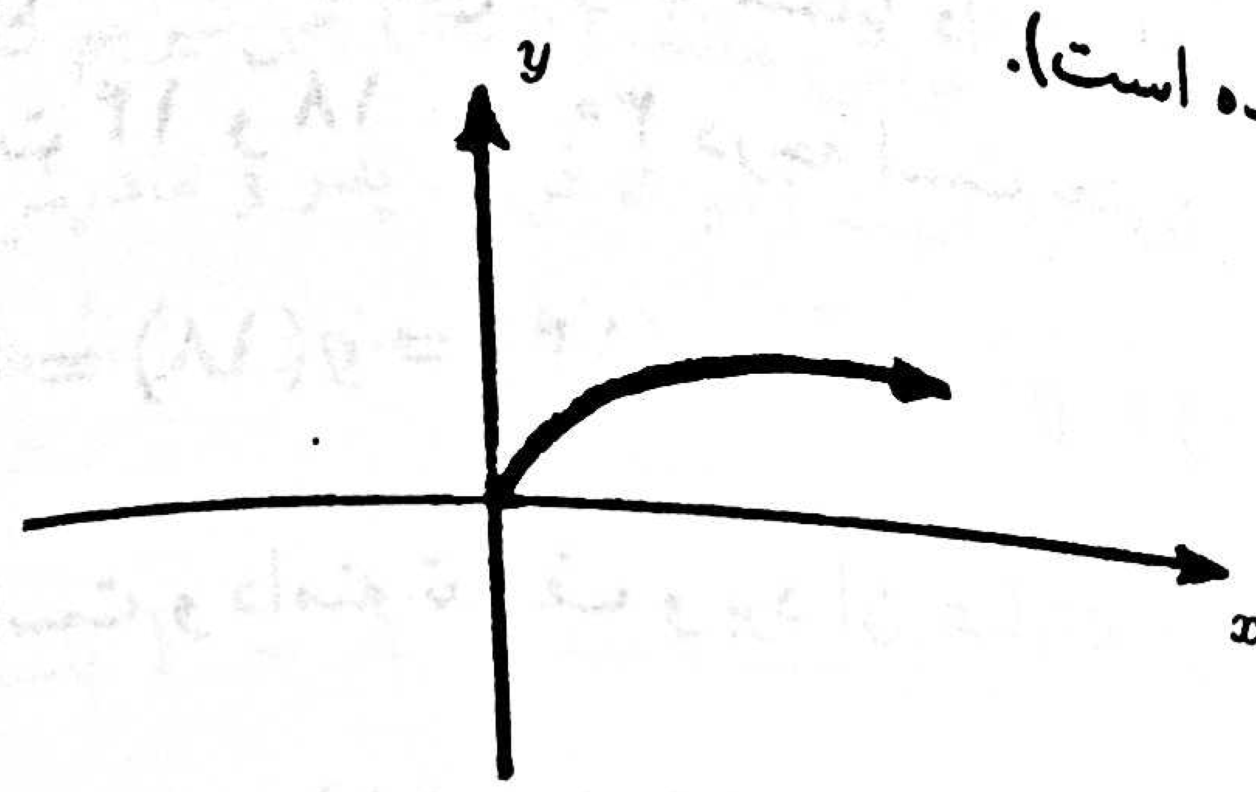
$$g : [۰, +\infty) \longrightarrow R$$



مثال ۲۴ : فرض کنیم: $f = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$، ملاحظه می‌شود که در این حالت f یک تابع است، نمودار f در زیر نشان داده شده است:

در واقع، در نمودار g در مثال قبل، مقادیر منفی از برد g حذف شده است.

(در رسم نمودار از نقطه‌یابی استفاده شده است).



$f:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$

توجه: رابطه f هنگامی تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار «f» را حداکثر در یک نقطه قطع کند. به عنوان مثال با توجه به نمودار رابطه g در مثال (۲۳) ملاحظه می‌شود که هر خط موازی محور yها در سمت راست محور yها، نمودار g را در دو نقطه قطع می‌کند.

قضیه ۶-۱ (تساوی دو تابع). فرض کنیم f و g دو تابع باشند، در این صورت $f=g$ اگر و فقط اگر $D_f=D_g=X$ و به ازای هر $x\in X$ ، $f(x)=g(x)$.

اثبات ـ فرض کنیم $f=g$ آنگاه:

$$x\in D_f \Longrightarrow \exists y\in R_f:(x,y)\in f \Longrightarrow (x,y)\in g \Longrightarrow x\in D_g$$

لذا $D_f\subset D_g$. اثبات $D_g\subset D_f$ به همین صورت است، پس $D_f=D_g=X$

فرض کنیم $x\in X$ دلخواه باشد، در این صورت:

$$y=f(x)\Longleftrightarrow (x,y)\in f\Longleftrightarrow (x,y)\in g\Longleftrightarrow y=g(x)$$

لذا به ازای هر $x\in X$، $f(x)=g(x)$.

بالعکس فرض کنیم به ازای هر $x\in X$، $f(x)=g(x)$. حال ثابت می‌کنیم $f=g$:

$$(x,y)\in f\Longleftrightarrow y=f(x)\Longleftrightarrow y=g(x)\Longleftrightarrow (x,y)\in g$$

پس $f=g$. □

مثال ۲۵ : فرض کنیم دو تابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{و} \quad g(x)=x+1$$

ملاحظه می‌شود که $D_f=R-\{1\}$ و $D_g=R$ پس $D_f\neq D_g$. اگرچه به ازای هر $x\neq 1$ ، $f(x)=g(x)$ اما $f\neq g$.

اکثر توابعی که ما با آنها سروکار داریم بر زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی تعریف می‌شوند و دارای ضابطه و قانون معینی هستند که هر x را به y می‌برد. همچنین مشاهده می‌شود که هر تابع با ضابطه خود و حوزه تعریفش معین می‌شود، بجز توابعی که حوزه تعریف آنها معین است. برای تعیین حوزه تعریف یک تابع چند نکته را باید رعایت نمود:

نکته اول - هرگاه y به صورت کسری بر حسب x باشد، حوزه تعریف تابع، مقادیر صفرکنندهٔ مخرج را شامل نمی‌شود.

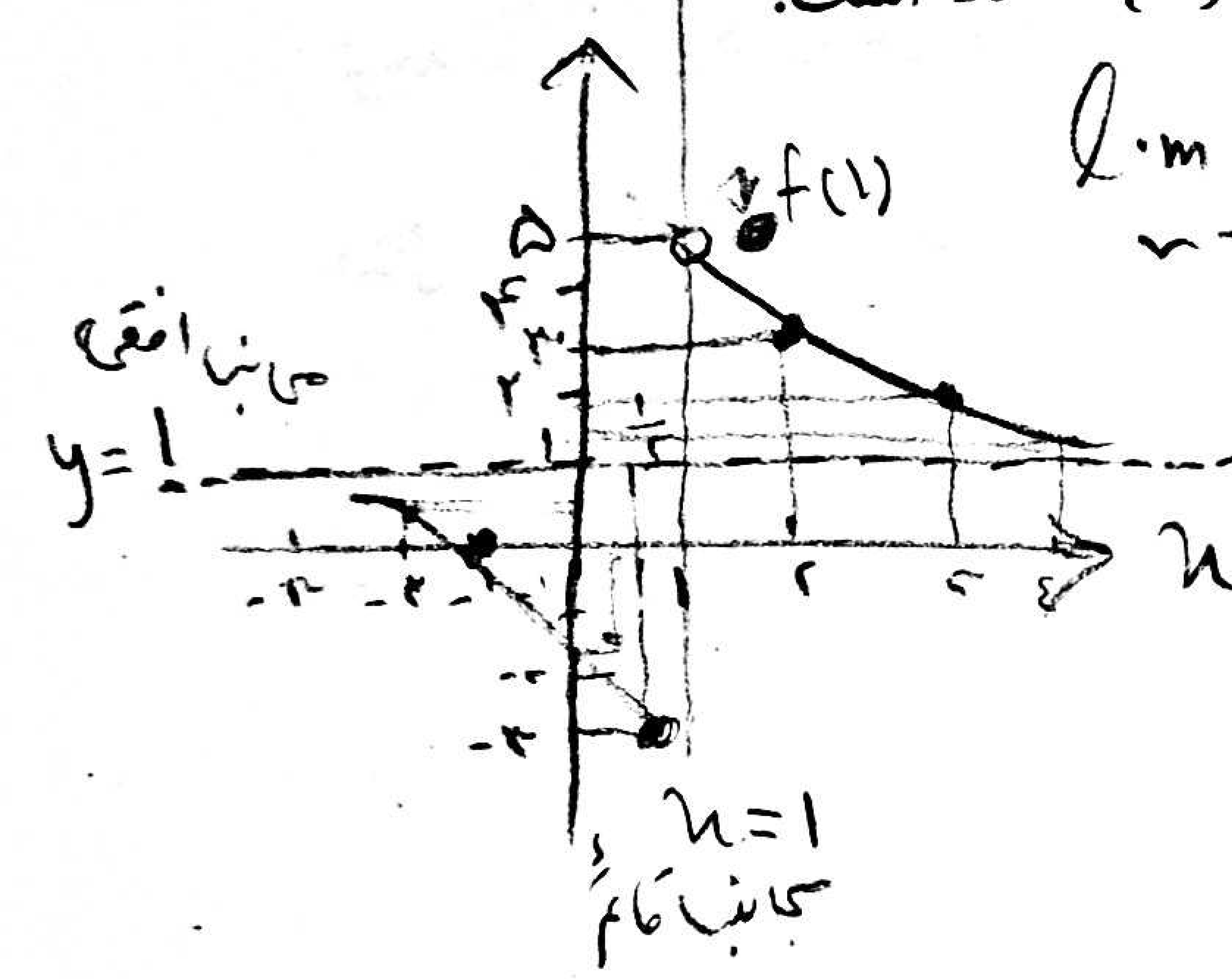
نکته دوّم - هرگاه y به صورت ریشه زوج از x باشد، حوزه تعریف تابع، مقادیری که زیر رادیکال منفی می‌شود را شامل نمی‌شود.

مثال ۲۶ : دامنه (حوزه) تعریف تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، مجموعه $R - \{1\}$ است.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{0} = \begin{cases} x \to 1^- & -\infty \\ x \to 1^+ & +\infty \end{cases}$ مجانب قائم

مثال ۲۷ : حوزه تعریف تابع:

M.T

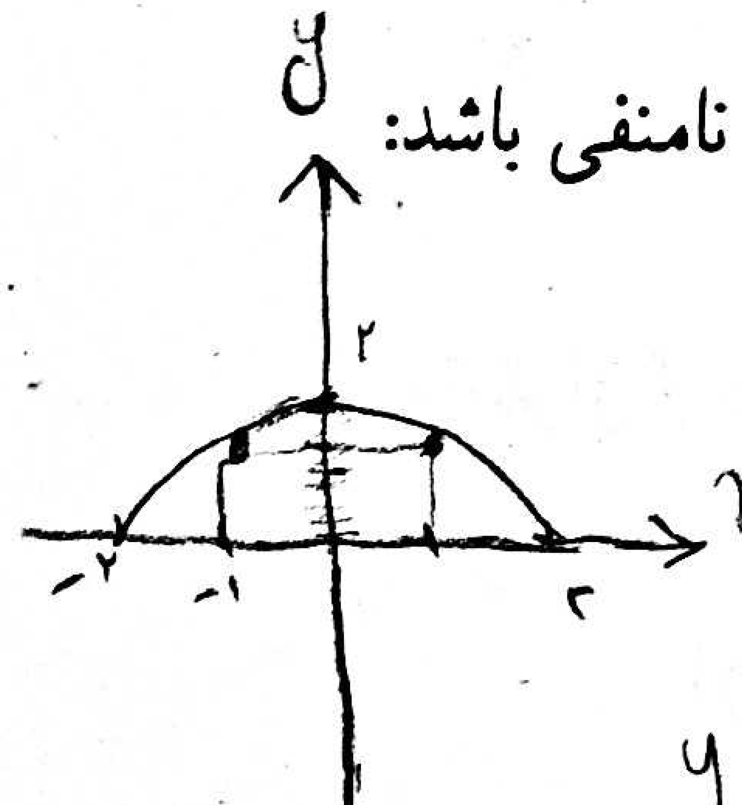


$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ مجانب افقی

تمام R است و برد آن $R - \{1\}$. ملاحظه می‌شود که:

$$f(3) = \frac{3+1}{3-1} = 2 \quad \text{و} \quad f(1) = 5$$



مثال ۲۸ : دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ مقادیری از x است که $4 - x^2$ نامنفی باشد:

$$4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow |x| \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

لذا دامنه تعریف f، بازه $[-2, 2]$ می‌باشد و برد آن عبارتست از $R_f = [0, +\infty)$.

$y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$

مثال ۲۹ : دامنه تعریف تابع زیر را بیابید:

$y \geq 0 : [0, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{1 - x}}$$

حل - اوّلاً $x \neq 1$. ثانیا مقادیر x باید طوری باشد که مقدار زیر رادیکال منفی نباشد یعنی:

$$A = \frac{x^2 - 7x + 10}{1 - x} \geq 0$$

ریشه‌های چندجمله‌ای $x^{۲} - ۷x + ۱۰$ عبارتند از $x_{۲} = ۵$ و $x_{۱} = ۲$. علامت عبارت A مطابق جدول زیر است:

	$-\infty$		۱		۲		۵		$+\infty$
$x^{۲} - ۷x + ۱۰$		+		+	۰	−	۰	+	
$۱ - x$		+	۰	−		−		−	
A		+	∞	−		+		−	

مقادیری که در آن A نامنفی باشد عبارتند از:

$$D_f = (-\infty, ۱) \cup [۲, ۵]$$

توجه کنید که برد f، بازه $[۰, +\infty)$ می‌باشد (چرا؟).

مثال ۳۰ : فرض کنید:

$$f(x) = \begin{cases} ۲ - \sqrt{۲ - x} & -۷ < x < -۲ \\ \sqrt{۴ - x^{۲}} & -۲ < x \leq ۲ \\ -\dfrac{۱}{x} & ۲ < x \end{cases}$$

دامنه f عبارتست از:

$$D_f = (-۷, -۲) \cup (-۲, ۲] \cup (۲, +\infty) = (-۷, +\infty) - \{-۲\}$$

چند مقدار از f در زیر داده شده است:

$$f(-۳) = ۲ - \sqrt{۲ - (-۳)} = ۲ - \sqrt{۵} \qquad (\text{زیرا } -۷ < -۳ < -۲)$$

$$f(-۱) = \sqrt{۴ - (-۱)^{۲}} = \sqrt{۳} \qquad (\text{زیرا } -۲ < -۱ \leq ۲)$$

$$f(۲) = \sqrt{۴ - ۲^{۲}} = ۰$$

$$f(۲/۱) = -\frac{۱}{۲/۱} \qquad (\text{زیرا } ۲ < ۲/۱)$$

برای تعیین برد آن سه حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اوّل: $-۷ < x < -۲$، در این حالت باید حوزه تغییرات $۲ - \sqrt{۲ - x}$ را بررسی کنیم پس:

$$-7 < x < -2 \Longrightarrow 4 < 2 - x < 9 \Longrightarrow 2 < \sqrt{2-x} < 3$$
$$\Longrightarrow -1 < 2 - \sqrt{2-x} < 0 \Longrightarrow -1 < f(x) < 0$$

بنابراین هرگاه $x \in (-7, -2)$ آنگاه $y = f(x) \in (-1, 0)$.

حالت دوم: $-2 < x \leq 2$، در این حالت باید به ازای این مقادیر از x حوزه تغییرات $\sqrt{4-x^2}$ را بررسی کنیم. پس:

$$-2 < x \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Longrightarrow -4 \leq -x^2 \leq 0$$
$$\Longrightarrow 0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

بنابراین هرگاه $x \in (-2, 2]$، آنگاه $y = f(x) \in [0, 2]$.

حالت سوم: $x > 2$، در این حالت باید به ازای این مقادیر x حوزه تغییرات $\frac{-1}{x}$ را بیابیم:

$$2 < x \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{-1}{x} < 0$$

بنابراین هرگاه $x \in (2, +\infty)$ آنگاه $y = f(x) \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

لذا حوزه مقادیر f عبارتست از:

$$R_f = (-1, 0) \cup [0, 2] \cup (-\frac{1}{2}, 0) = (-1, 2]$$

مثال ۳۱ : دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$ بازه $[-1, 1]$ می‌باشد (چرا؟).

مثال ۳۲ : دامنه و برد تابع $f(x, y) = x + y$ را تعیین و $f(0, 0), f(2, 3)$ را بیابید.

حل ـ دامنه تابع R^2 است و برد آن R و $f(2, 3) = 2 + 3 = 5$ و $f(0, 0) = 0$.

مثال ۳۳ : دامنه تابع $g(x) = (x, 2x + 1)$ که در آن $(x \in R)$، همانطور که پیداست مجموعه R است و برد تابع زیر مجموعه‌ایست از R^2، در واقع مجموعه نقاط روی خط $y = 2x + 1$ برد تابع g می‌باشد.

در دو مثال (۳۲) و (۳۳) ملاحظه می‌شود که: $f : R^2 \longrightarrow R$ و $g : R \longrightarrow R^2$ می‌باشد، تابعی از نوع g یک تابع برداری است. بطور کلّی هر تابعی که برد آن زیر مجموعه‌ای از R^n باشد[1]، **تابع برداری** نامیده می‌شوند. توابعی که در این درس ما با آن سروکار داریم توابعی هستند که دامنه و برد آنها زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی است. در هر تابع حقیقی $y = f(x)$ که x را **متغیر مستقل** و y را **متغیر وابسته (یا حقیقی)** می‌نامند.

۱- $R^n = R \times R \times ... \times R = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in R\}$

تابع یک به یک

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، گوییم f یک به یک است اگر:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

به عبارت دیگر، با در نظر گرفتن عکس نقیض گزاره فوق:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

مثال ۵۰ : تابع $f(x) = x^3$ تابعی یک به یک است زیرا:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Longrightarrow x_1 = x_2 \quad (\forall x_1, x_2 \in R)$$

مثال ۵۱ : تابع $f : R - \{1\} \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ تابعی یک به یک است.

مثال ۵۲ : تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست زیرا به عنوان مثال $f(-3) = f(3)$، در حالیکه $3 \neq -3$

توجه: بنابر تعریف، هر تابع یک به یک است اگر و فقط اگر هر خط موازی محور xها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تابع پوششی

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، f را پوششی گوییم اگر به ازای هر $y \in Y$ ، حداقل یک $x \in X$ موجود باشد بطوریکه $y = f(x)$. به عبارت دیگر f پوششی است اگر $f(X) = Y$.

مثال ۵۳ : تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^3$ تابعی است پوششی زیرا به ازای هر $y \in R$ اگر قرار دهیم: $x = \sqrt[3]{y}$ آنگاه $f(x) = y$.

مثال ۵۴ : تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^2$ پوششی نیست زیرا برای هر عدد حقیقی x، $f(x)$ نامنفی است پس برای هر $y < 0$ نمی‌توان $x \in R$ یافت که $f(x) = y$.

تابع دو سویی

تابع $f : X \longrightarrow Y$ را یک دوسویی گوییم اگر f یک به یک و پوششی باشد. تابع دو سویی را «تناظر یک به یک» نیز می‌نامند.

مثال ۵۵ : تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^3$ یک دوسویی است.

مثال ۵۶ : تابع f در زیر داده شده است:

$$f : R - \{\circ\} \longrightarrow R - \{۱\} \qquad f(x) = \frac{x - ۱}{x}$$

می‌خواهیم نشان دهیم این تابع پوششی است. برای این منظور باید نشان دهیم:

$$\forall y \in R - \{۱\}, \exists x \in R - \{\circ\} : y = f(x)$$

به عبارت دیگر به ازای هر $y \in R - \{۱\}$ باید $x \in R - \{\circ\}$ بیابیم که $y = f(x)$.

$$y = f(x) = \frac{x - ۱}{x} \Longleftrightarrow y = \frac{x - ۱}{x} \Longrightarrow x = \frac{۱}{۱ - y}$$

حال اگر به ازای $y \neq ۱$ قرار دهیم $x = \frac{۱}{۱ - y}$، آنگاه واضح است که:

$$f(x) = f(\frac{۱}{۱ - y}) = \frac{\frac{۱}{۱ - y} - ۱}{\frac{۱}{۱ - y}} = \frac{\frac{y}{۱ - y}}{\frac{۱}{۱ - y}} = y \Longrightarrow f(x) = y$$

بعنوان مثال اگر $y = ۳$، آنگاه با قرار دادن $x = \frac{۱}{۱ - ۳} = -\frac{۱}{۲}$ داریم: $f(-\frac{۱}{۲}) = ۳$.

تابع معکوس

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ تابعی یک به یک باشد، در این صورت معکوس (وارون) f یعنی $f^{-۱}$ وجود دارد و چنین تعریف می‌شود:

$$f^{-۱} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-۱}(y) = x$$

و با تبدیل x به y داریم:

$$\boxed{y = f^{-۱}(x) \Longleftrightarrow f(y) = x}$$

توجه: هرگاه معکوس f موجود باشد آنگاه:

$$\boxed{D_{f^{-۱}} = R_f} \quad , \quad \boxed{R_{f^{-۱}} = D_f}$$

و برای هر $x \in D_f$ و $y \in D_{f^{-۱}}$ داریم:

$$\boxed{f^{-۱}(f(x)) = x} \quad , \quad \boxed{f(f^{-۱}(y)) = y}$$

مثال ۵۷ : $f : R - \{0\} \longrightarrow R - \{1\}$ با ضابطه $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ تابعی یک به یک است پس معکوس آن موجود است. برای بدست آوردن ضابطه تابع معکوس آن چنین عمل می‌کنیم:

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow f(y) = x \Longleftrightarrow \frac{y-1}{y} = x \Longleftrightarrow y = \frac{1}{1-x}$$

لذا $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x}$. ملاحظه می‌شود که برد f مجموعه $R - \{1\}$ است و لذا دامنه f^{-1} نیز $R - \{1\}$ است.

۱۹✓

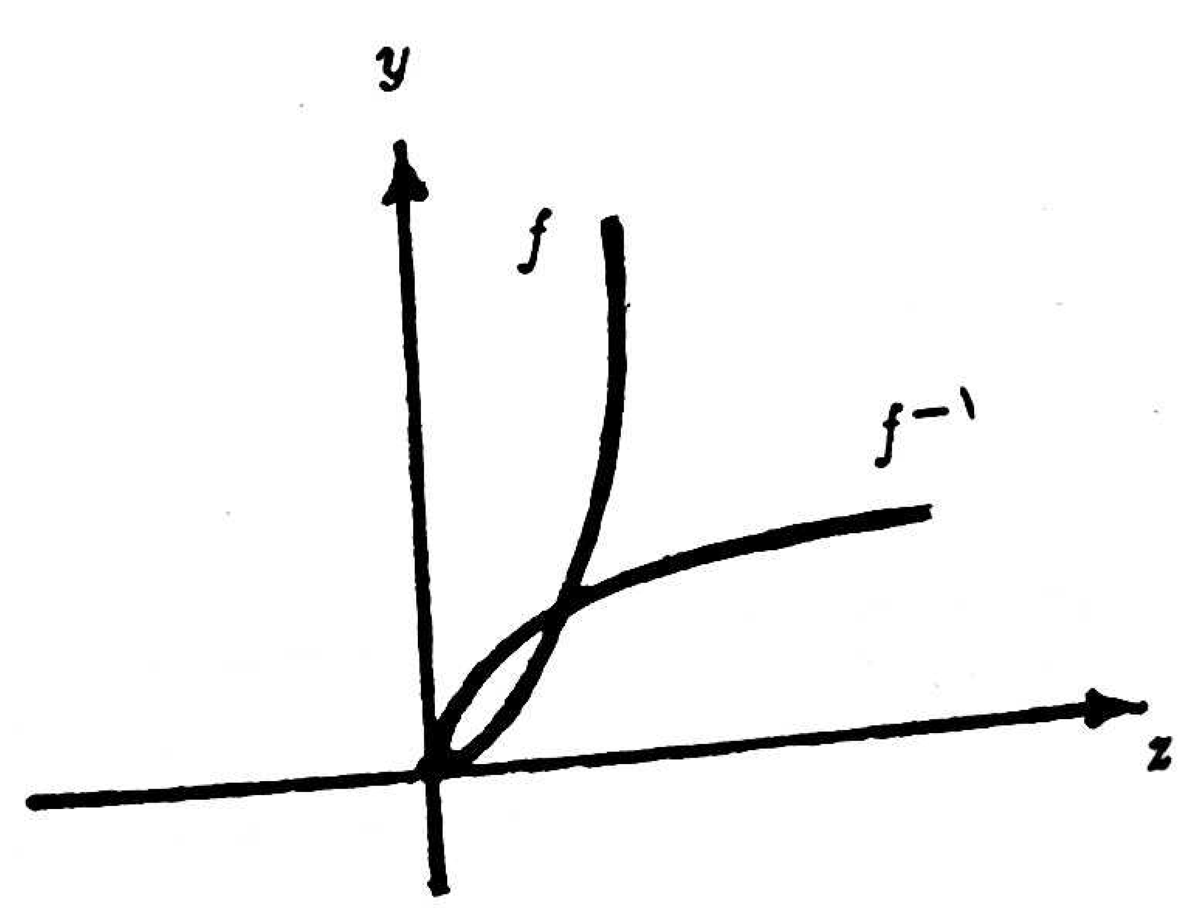
مثال ۵۸ : برای یافتن معکوس تابع $f(x) = x^3$ (که یک به یک است) به این طریق می‌توانیم عمل کنیم که قرار دهیم $y = x^3$ و لذا $x = \sqrt[3]{y}$ با تعویض x و y داریم:

$$y = \sqrt[3]{x} \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

مثال ۵۹ : تابع $f : [0, +\infty) \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^2$ یک به یک است و برد آن $[0, +\infty)$ می‌باشد لذا معکوس آن $f^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow R$ با ضابطه زیر است:

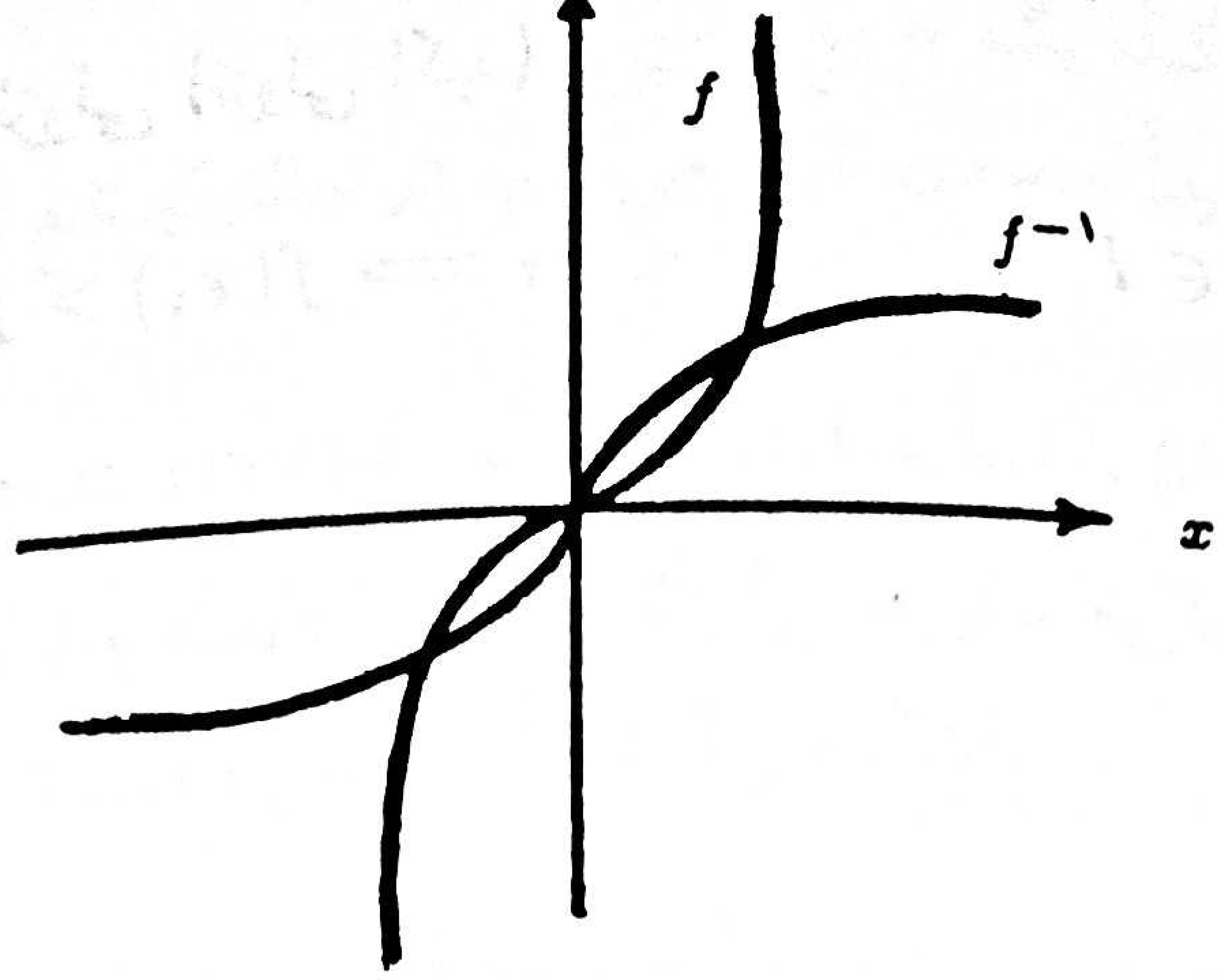
$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow f(y) = x \Longleftrightarrow y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصاتی مطابق شکل زیر می‌باشد:



توجه: نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است.

مثال ۶۰ : اگر $f(x) = x^3$ آنگاه $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. نمودار تابع و نمودار معکوس آن در شکل آمده است:



قضیه ۶-۶ هرگاه تابع $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز یک به یک است.

اثبات ـ فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک باشد، در این صورت f^{-1} موجود است. فرض کنیم y_1 و y_2 دو عضو دلخواه از دامنه f^{-1} (برد f) باشند و $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$، همچنین $f^{-1}(y_2) = x_2$ و $x_1 = f^{-1}(y_1)$ آنگاه چون $x_1 = x_2$ پس: $f(x_1) = f(x_2)$ و لذا:

$$f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) \Longrightarrow y_1 = y_2$$

قضیه ۶-۷ هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک باشد و f^{-1} معکوس آن، در این صورت f معکوس تابع f^{-1} است، به عبارت دیگر $f = (f^{-1})^{-1}$.

اثبات ـ طبق تعریف تابع معکوس داریم: $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ اگر و فقط اگر $f^{-1}(y) = x$ و اگر و فقط اگر $y = f(x)$ پس $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

تابع صعودی

فرض کنیم f بر بازهٔ I تعریف شده باشد (یعنی $I \subset D_f$) در این صورت می‌گوییم f بر I صعودی است اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

و f را بر I **اکیداً صعودی (صعودی اکید)** گوییم اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع نزولی

فرض کنیم f بر بازه I تعریف شده باشد، در این صورت گوییم f بر I نزولی است اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

۴-۶ چند تابع خاص

تابع همانی

تابع $R \longrightarrow R : I$ را با ضابطه $I(x) = x$ تابع همانی می‌نامند. نمودار تابع I خط $y = x$ است.

توجه: هرگاه $f : R \longrightarrow R$ تابعی یک به یک باشد و $D_f = R$ آنگاه:

$$fof^{-1} = I \quad , \quad f^{-1}of = I$$

مثال ۷۶ : فرض کنیم $f(x) = 2x^3 + 5$، در این صورت f تابعی اکیداً صعودی است و لذا یک به یک است و بنابراین معکوس آن موجود می‌باشد. برای تعیین معکوس آن قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \Longleftrightarrow 2x^3 + 5 = y$$
$$\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-5}{2}} \Longrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y-5}{2}}$$

بنابراین ضابطه f^{-1} بدست می‌آید:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$$

حال ملاحظه می‌شود که به ازای هر $x \in R$:

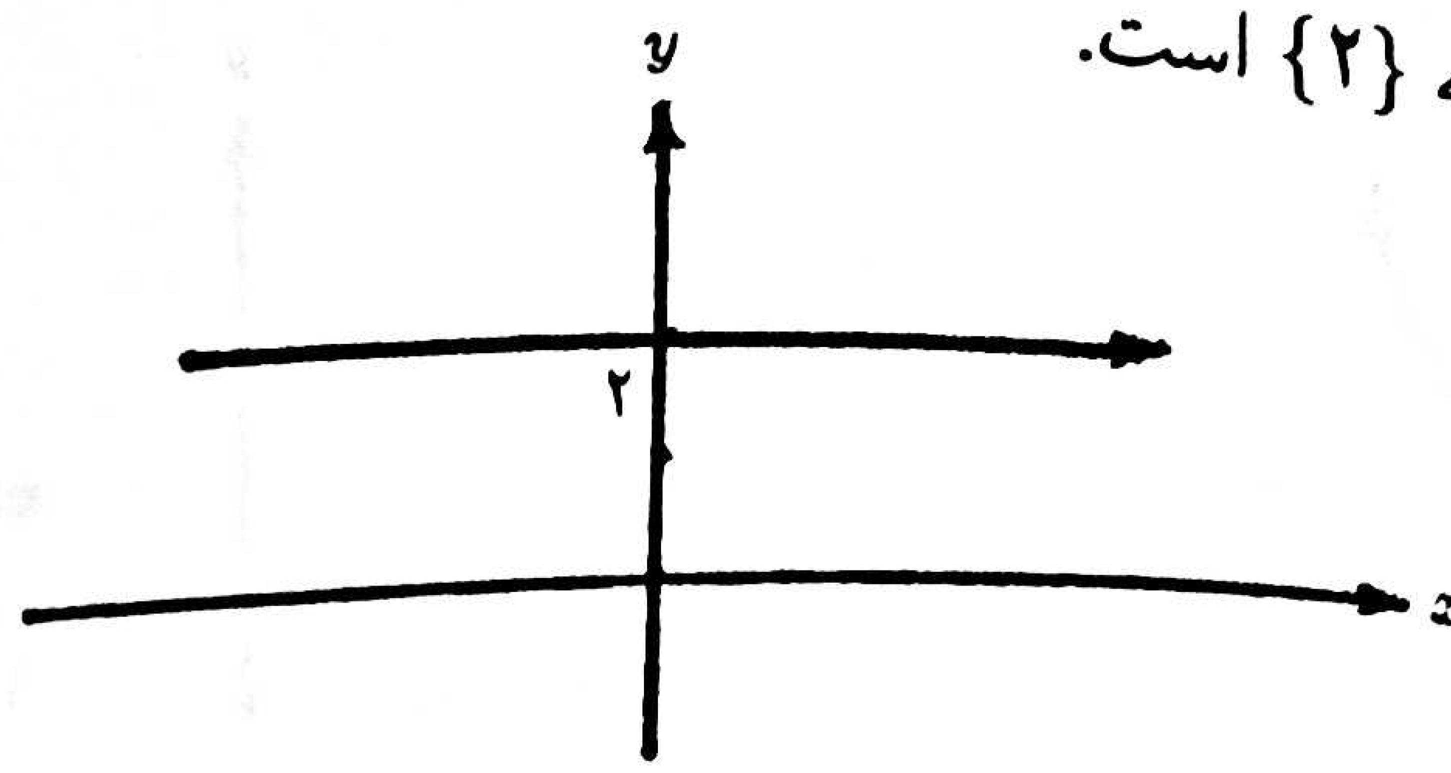
$$f(f^{-1}(x)) = 2(f^{-1}(x))^3 + 5 = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}\right)^3 + 5 = 2(\frac{x-5}{2}) + 5 = x$$

و به همین ترتیب $f^{-1}(f(x)) = x$ پس $fof^{-1} = f^{-1}of = I$.

تابع ثابت

تابع $f : R \longrightarrow R$ را با ضابطه $f(x) = c$ که در آن c یک عدد ثابت است، تابع ثابت نامیده می‌شود. دامنه تابع ثابت R و برد آن مجموعه $\{c\}$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود که تابع ثابت نه یک به یک است و نه پوششی.

مثال ۷۷: هرگاه $f(x) = ۲$ آنگاه f یک تابع ثابت است و نمودار آن خط $y = ۲$ می‌باشد. دامنهٔ آن R و برد آن مجموعه $\{۲\}$ است.



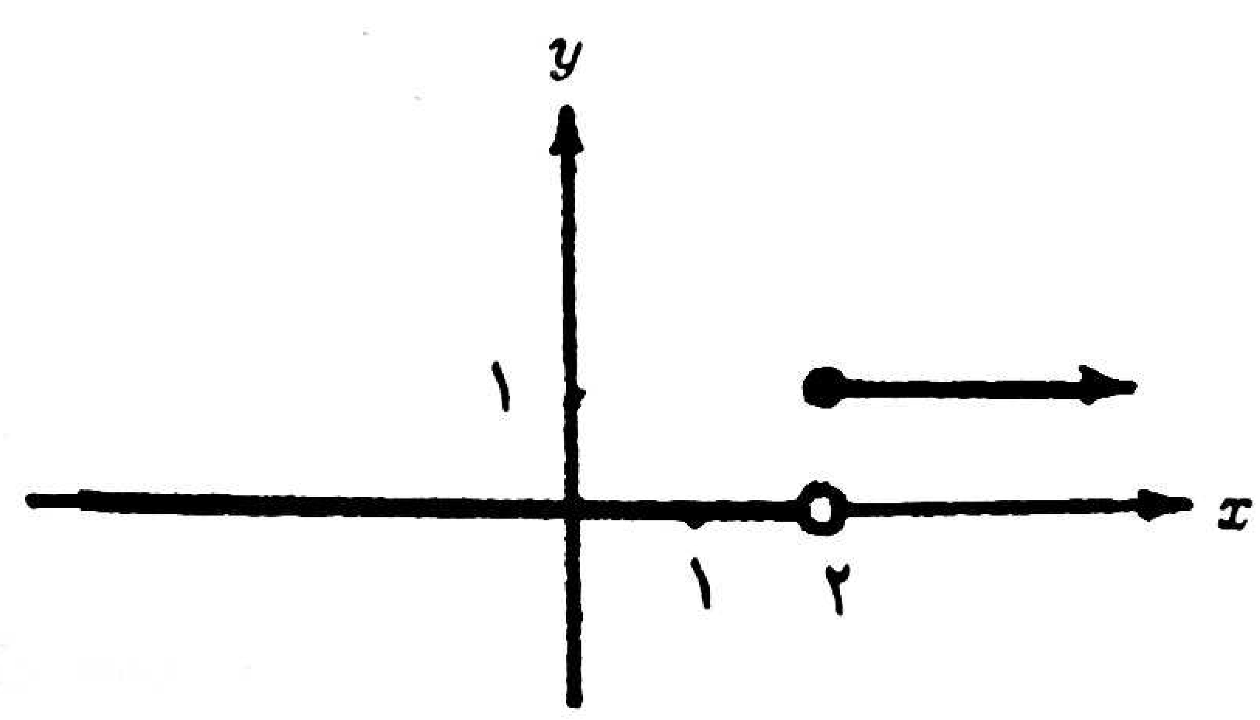
تابع پله‌ای واحد

فرض کنیم c یک عدد حقیقی نامنفی دلخواه باشد. تابع پله‌ای واحد را با $U_C(x)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$U_c(x) = \begin{cases} ۰ & x < c \\ ۱ & x \geq c \end{cases} \qquad U_c : R \longrightarrow \{۰, ۱\}$$

مثال ۷۸: $U_۲(x)$ را در نظر می‌گیریم، نمودار و ضابطهٔ آن چنین است:

$$U_۲(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۲ \\ ۱ & ۲ \leq x \end{cases}$$

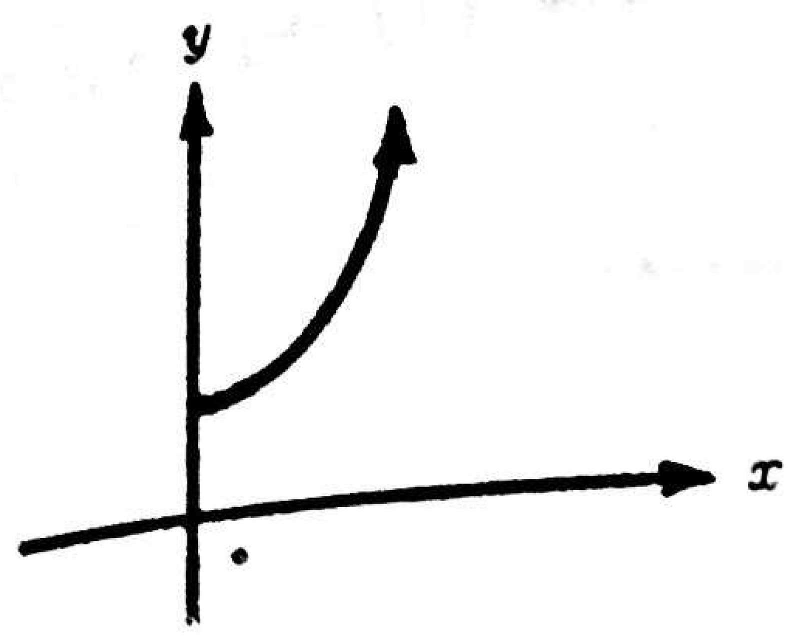


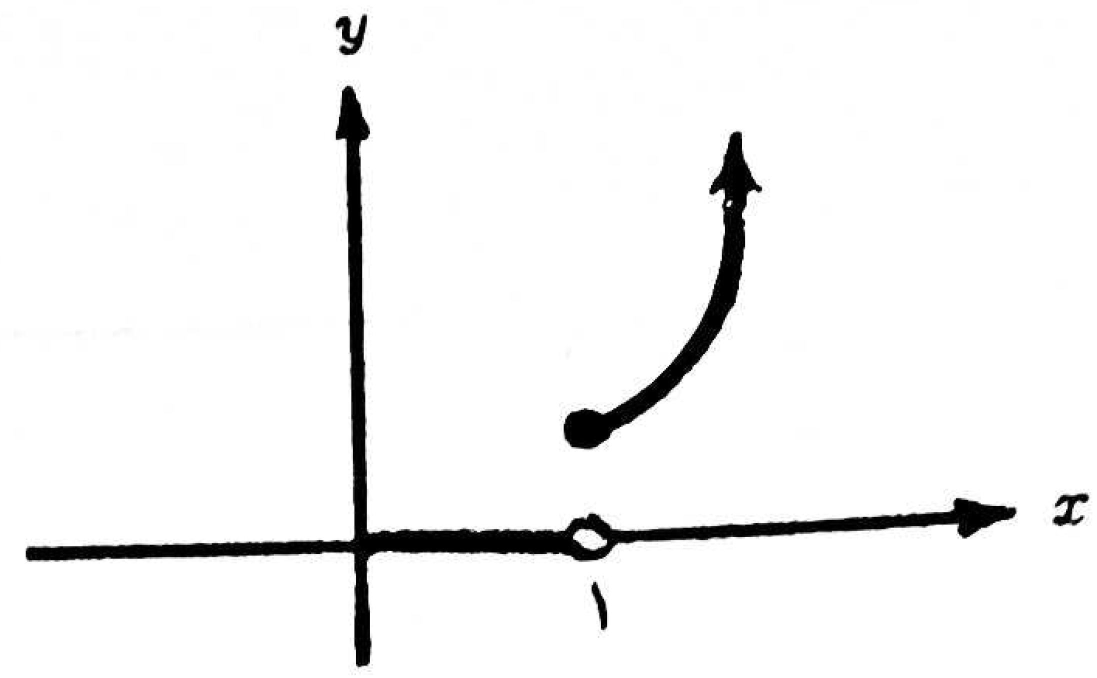
تابع پله‌ای واحد برای انتقال به اندازه مسافت c بطرف راست یک تابع مفروض f با دامنه $x \geq ۰$ استفاده می‌شود. هرگاه $y = f(x)$ تابع مفروض باشد، آنگاه تابع انتقال یافته عبارتست از: $g(x) = U_c f(x-c)$.

مثال ۷۹: فرض کنیم $f : [۰, +\infty) \longrightarrow R$ با ضابطه $f(x) = ۱ + x^۲$ تعریف شده باشد. در این صورت برای انتقال به اندازه مسافت ۲ به طرف راست تابع f، تابع $g(x) = U_۲(x) f(x - ۲)$ را در نظر می‌گیریم، پس $g(x) = U_۲(x)[۱ + (x - ۲)^۲]$ لذا ضابطه آن چنین است:

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۲ \\ ۱ + (x - ۲)^۲ & ۲ \leq x \end{cases}$$

نمودار f و نمودار g:





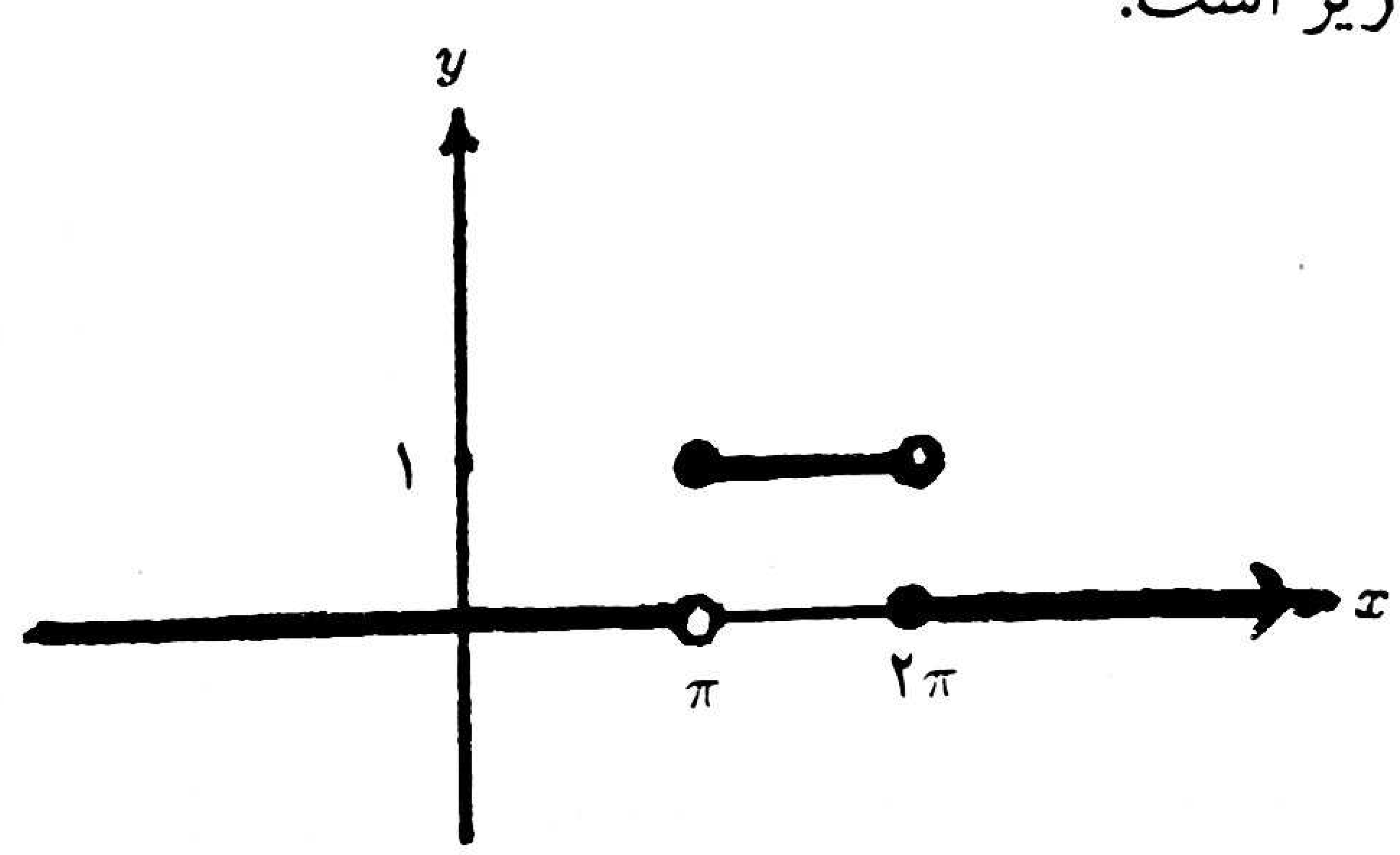
مثال ۸۰ : برای رسم نمودار تابع $y = h(x)$ که در آن:

$$h(x) = U_{\pi}(x) - U_{2\pi}(x) \qquad x \geq 0$$

ابتدا ضابطه آن را تعیین می‌کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & 0 \leq x < \pi \\ 1 - 0 = 1 & \pi \leq x < 2\pi \\ 1 - 1 = 0 & 2\pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

نمودار h به شکل زیر است:



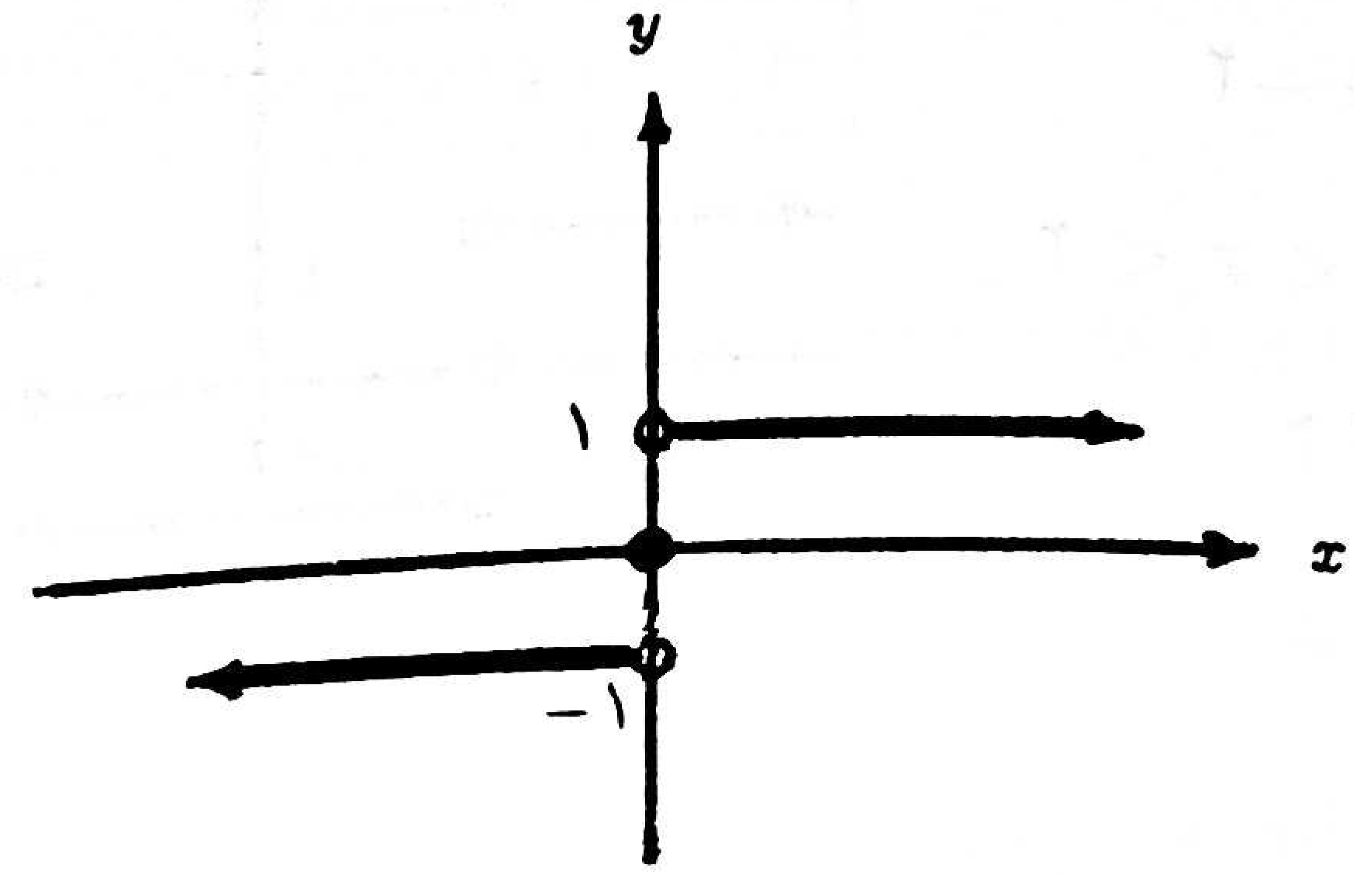
توجه: تابع $U(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم: $U(x) = U_0(x)$

تابع علامت

تابع علامت را با sgn نشان داده و به صورت تعریف می‌کنیم:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

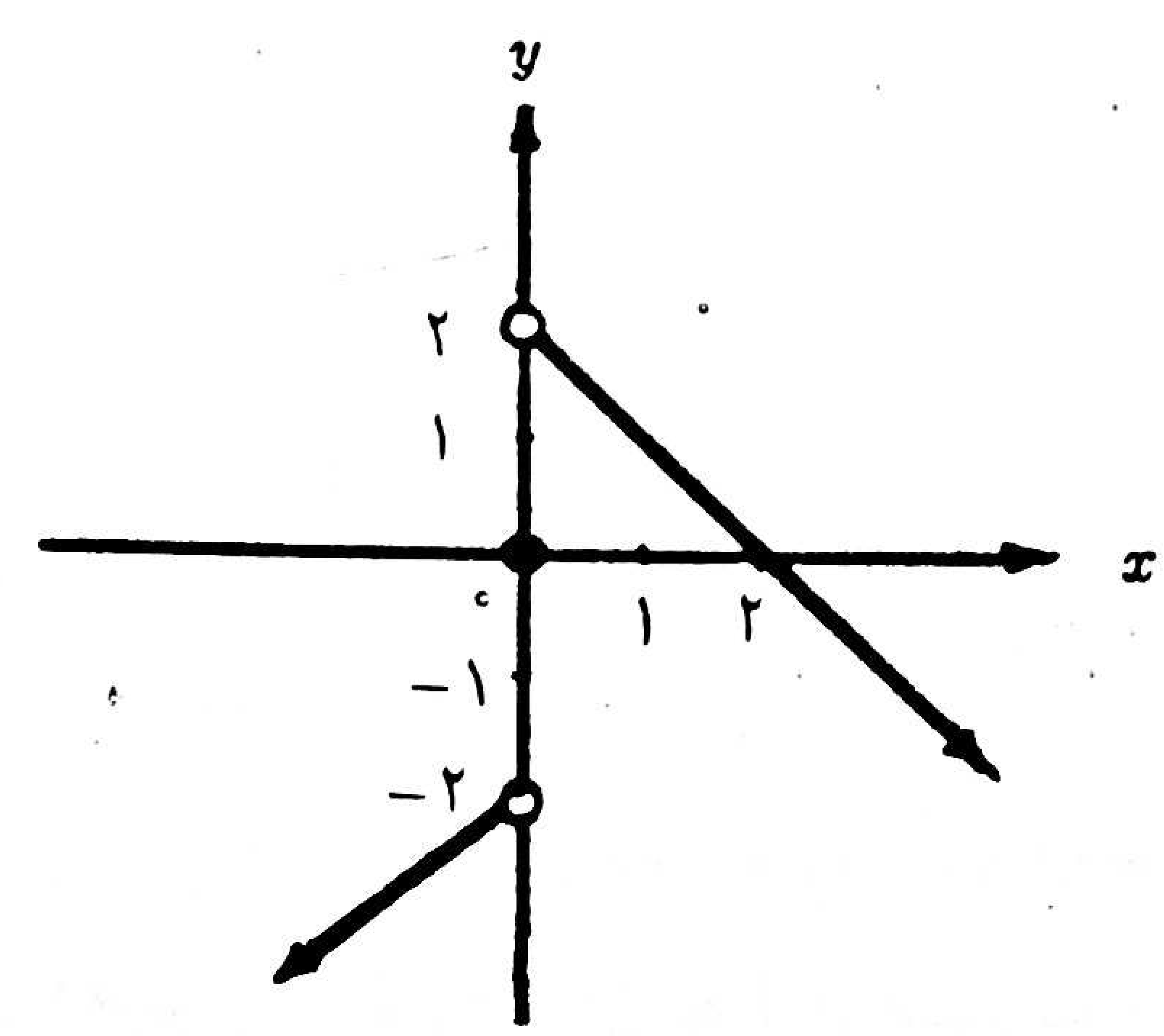
ملاحظه می‌شود که $D_{sgn} = R$ و $R_{sgn} = \{-۱, ۰, ۱\}$. نمودار آن به صورت زیر است:



مثال ۸۱ : فرض کنید $f(x) = -(x-۲)sgnx$ ، در این صورت $D_f = R$:

$$f(x) = \begin{cases} x-۲ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -(x-۲) & x > ۰ \end{cases}$$

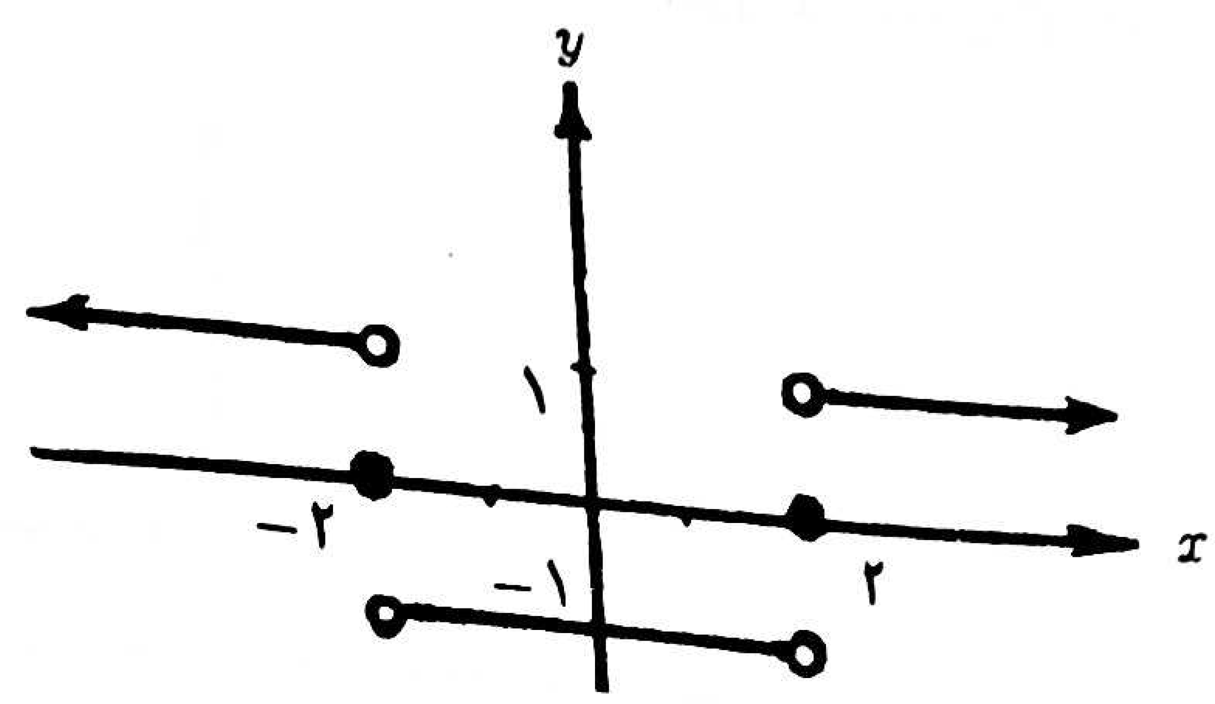
لذا برد تابع عبارتست از: $R_f = \{۰\} \cup (-\infty, -۲) \cup (-\infty, ۲) = (-\infty, ۲)$ و نمودار آن شکل زیر است:



مثال ۸۲ : هرگاه $f(x) = sgn(x^۲ - ۴)$ آنگاه $D_f = R$ و برای تعیین ضابطه f باید علامت $x^۲ - ۴$ را تعیین کنیم. هرگاه $x^۲ - ۴ = ۰$ آنگاه $x = \pm ۲$ و لذا علامت $x^۲ - ۴$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲ - ۴$		+	۰	−	۰	+	

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ -1 & -2 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$



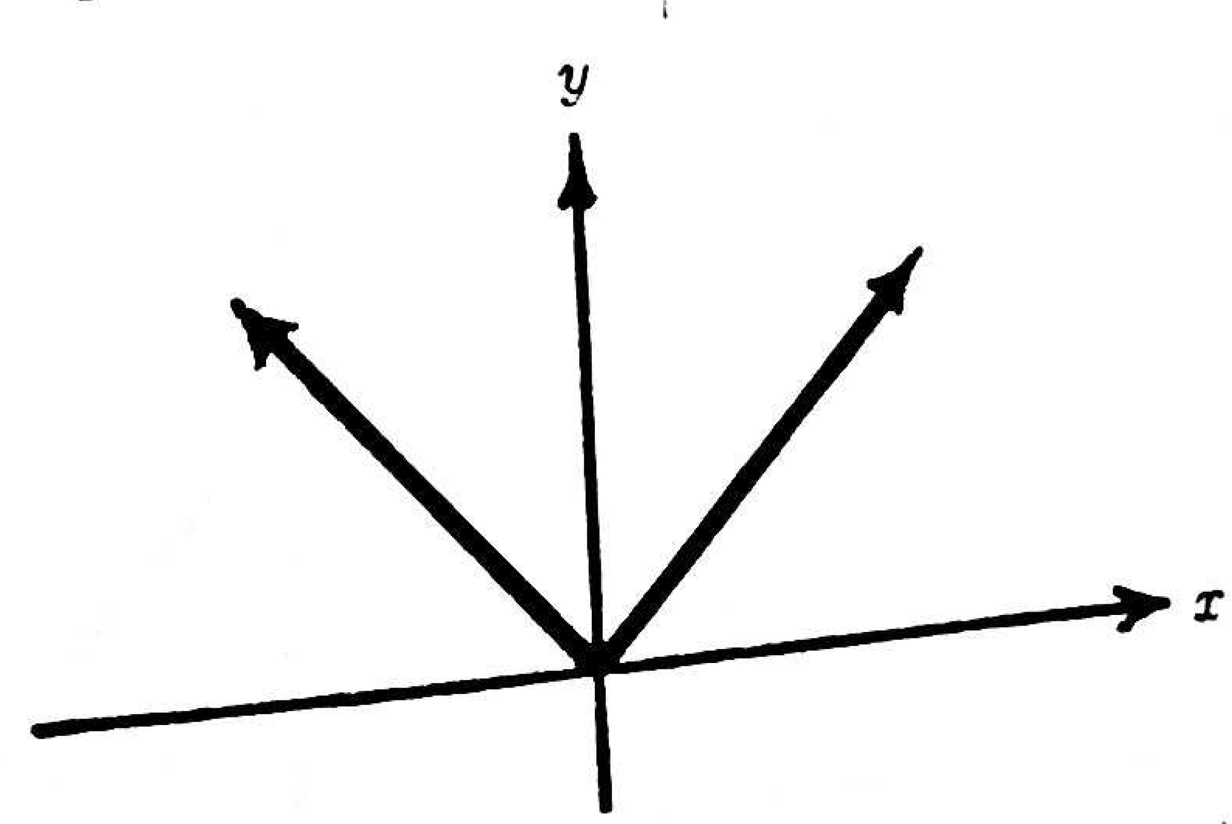
مثال ۸۳ : تابع $f(x) = sgnx + U(x)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $D_f = R$، برای تعیین برد آن داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases} \Longrightarrow R_f - \{-1, 1, 2\}$$

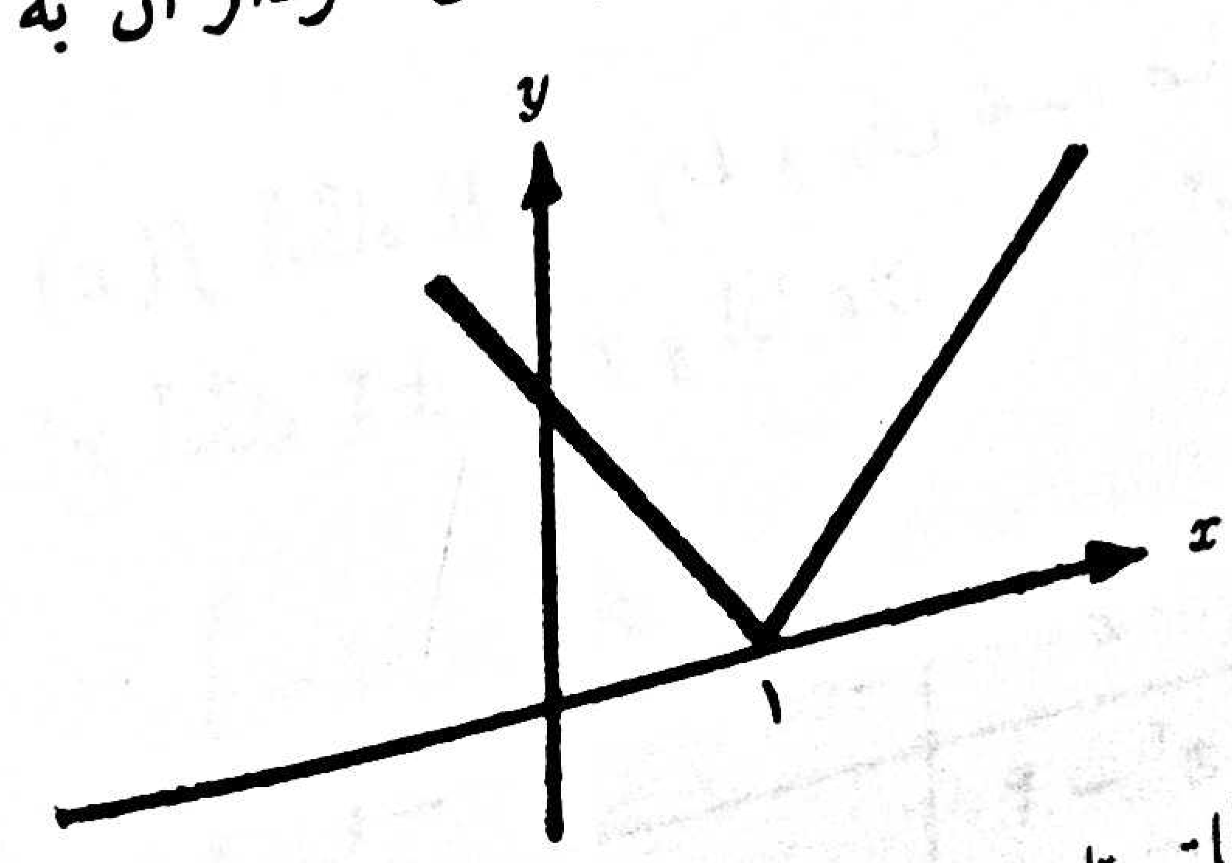
تابع قدرمطلق

تعریف می‌کنیم: $f(x) = |x|$ پس $D_f = R$ و $R_f = [0, +\infty)$ و بنابر تعریف قدرمطلق داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$



مثال ۸۴ : می‌خواهیم نمودار $f(x) = |x - 1|$ را رسم کنیم. برای رسم آن کافیست نمودار $y = |x|$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. پس نمودار آن به این صورت است:



توجه: تابع قدر مط...

نکته: با توجه به تعاریف تابع قدرمطلق و تابع علامت داریم:

$$\boxed{x\, sgn(x) = |x|}$$

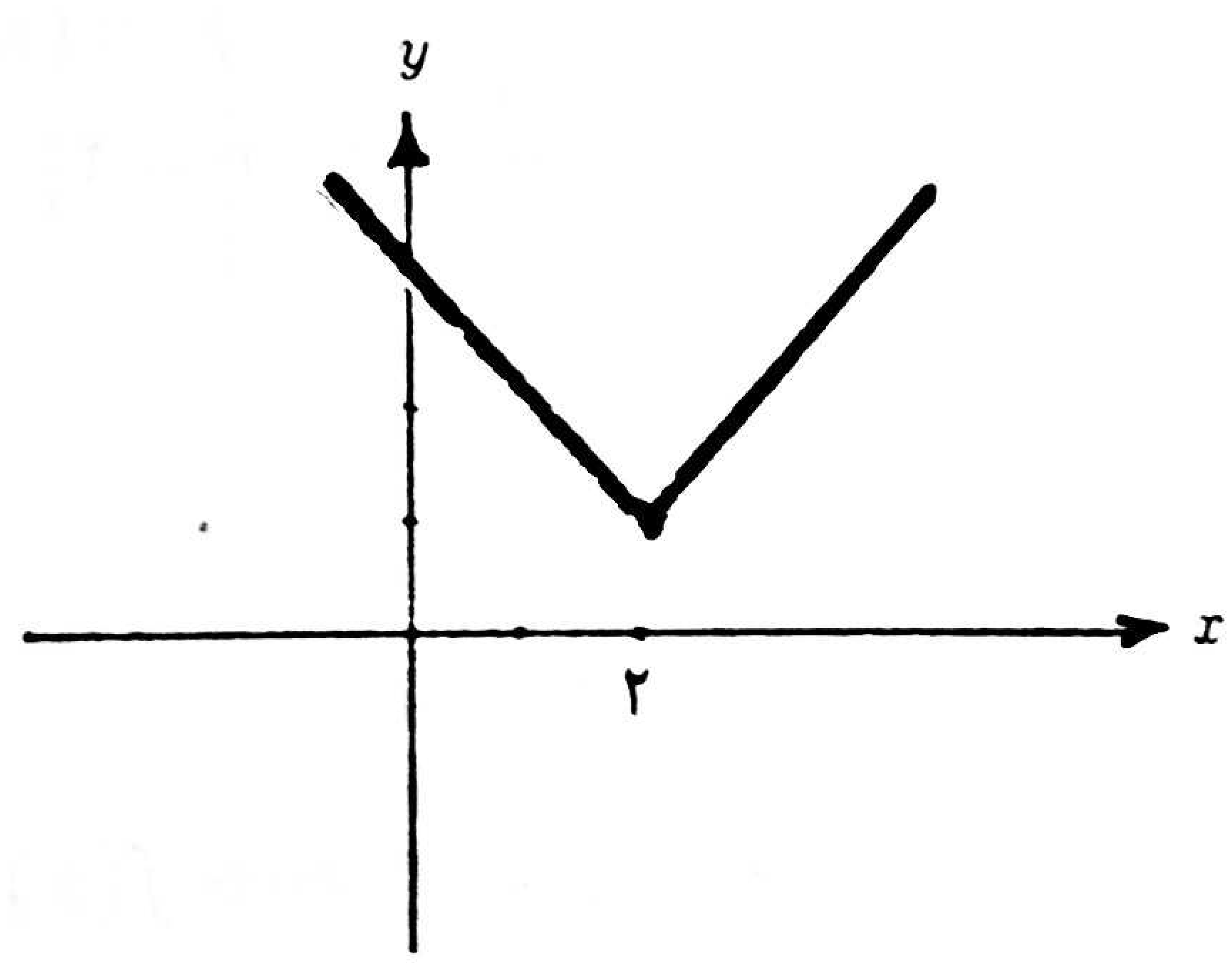
مثال ۸۱: نمودار تابع زیر را رسم کنید:

$$f(x) = |x-2|+1$$

حل: با استفاده از تعریف قدرمطلق داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x-2+1 & 2\le x \\ 2-x+1 & x<2 \end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} x-1 & 2\le x \\ -x+3 & x<2 \end{cases}$$

نمودار آن به صورت زیر است:



مثال ۸۲: مطلوبست رسم نمودار تابع زیر:

$$g(x) = |2x+2|-3$$

حل: با تعیین علامت $2x+2$ داریم:

$$g(x)=\begin{cases} 2x+2-3 & -1\le x \\ -2x-2-3 & x<-1 \end{cases} \Longrightarrow g(x)=\begin{cases} 2x-1 & -1\le x \\ -2x-5 & x<-1 \end{cases}$$

بنابراین: $D_g = R$ و $R_g = [-3,+\infty)$

نمودار g در زیر رسم شده است:

و بنابر قسمت (d) قضیه قبل: $A = (A')'$.

تابع جزء صحیح

فرض کنیم x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. در این صورت عدد صحیح n هست که $n \le x < n+1$

در واقع به ازای هر عدد حقیقی x عدد صحیح n چنان موجود است که:

$$x = n + p \quad n \in Z \quad , \quad ۰ \le p < ۱$$

مثال ۹۳ : $۱/۶۲ = ۱ + ۰/۶۲$ و $-۳/۴ = -۴ + ۰/۶$

تعریف فرض کنیم x عدد حقیقی دلخواه باشد، تابع $[x] : R \longrightarrow Z$ تعریف می‌شود:

$$\boxed{[x] = n \iff n \le x < n + ۱ \iff x = n + p, p \in [۰, ۱)}$$

مثال ۹۴ : $[-\frac{۱}{۵}] = -۱$ و $[۲/۱] = ۲$ و $[-۲/۱] = -۳$ و $[\frac{۱}{۵}] = ۰$

تابع $[x]$ را با E نیز نشان می‌دهند و **تابع جزء صحیح** می‌نامند. عدد p را **جزء کسری** x می‌نامند.

ملاحظه می‌شود که:

$$p = x - [x] \qquad (۰ \le p < ۱)$$

اکنون پاره‌ای از خواص تابع جزء صحیح را که در مسائل مورد استفاده است بیان می‌کنیم:

قضیه ۶-۱۲ (خواص تابع جزء صحیح).

الف ـ هرگاه n عدد صحیح باشد آنگاه:

$$\boxed{[n] = n}$$

ب ـ به ازای هر عدد حقیقی x:

$$\boxed{[x] \le x < [x] + ۱}$$

پ ـ به ازای هر عدد حقیقی x:

$$\boxed{۰ \le x - [x] < ۱ \; , \; x - ۱ < [x] \le x}$$

ت - هرگاه $m \in Z$ و عدد x حقیقی باشد آنگاه:

$$\boxed{[x+m]=[x]+m}$$

ث - به ازای هر عدد حقیقی مثبت و غیر صحیح x:

$$\boxed{[-x]=-[x]-۱} \qquad (x \notin Z)$$

اثبات - با توجه به تعریف تابع جزء صحیح داریم:

$$[x]=n \Longleftrightarrow n \le x < n+۱ \Longleftrightarrow [x] \le x < [x]+۱$$

هرگاه $x=n$ آنگاه $[x]=n$ و لذا (الف) و (ب) ثابت می‌شود. قسمت (پ) نیز نتیجه قسمت (ب) می‌باشد.

برای اثبات قسمت (ت) فرض می‌کنیم: $n \le x < n+۱$ $(n \in Z)$، لذا $[x]=n$

$$n \le x < n+۱ \Longrightarrow (n+m) \le x+m < (n+m)+۱$$

بنابراین با استفاده از تعریف تابع جزء صحیح چون $x+m$ بین دو عدد صحیح متوالی واقع شده پس: $[x+n]=n+m=[x]+m$

هرگاه $x \in R^+ - Z$ آنگاه $[x]=n$ که در آن $n<x<n+۱$ لذا $-n-۱<-x<-n$ پس $[-x]=-n-۱=-[x]-۱$. لذا قسمت (ت) نیز ثابت می‌شود. □

مثال ۹۵ : با استفاده از قضیه قبل داریم:

$$[۳٫۲]=[۰٫۲+۳]=[۰٫۲]+۳=۳+۰$$
$$[-۴٫۲]=[-۴-۰٫۳]=-[۰٫۲]-۱-۴=۰-۱-۴=-۵$$

تعریف (تابع جزء کسری). را با $p(x)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

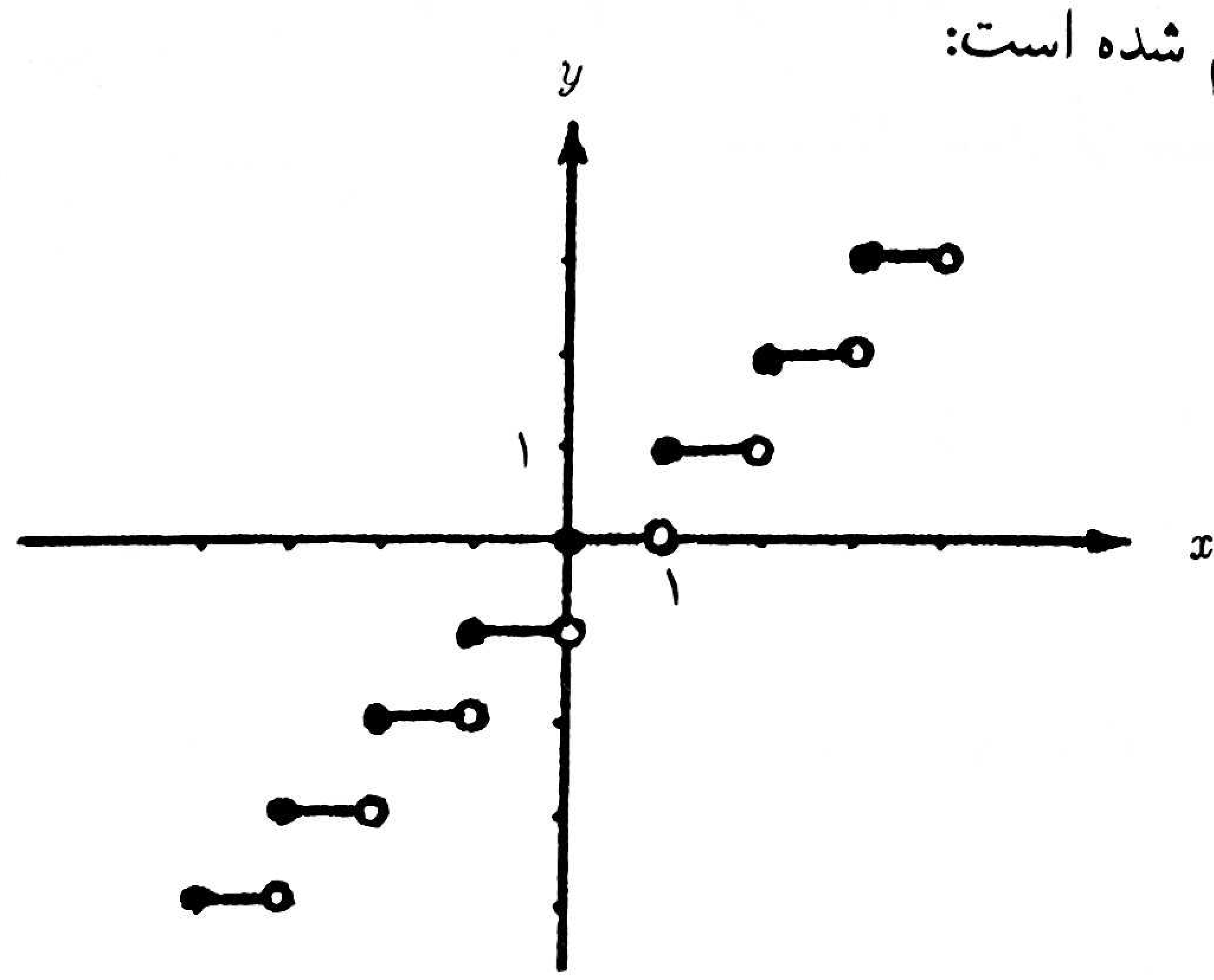
$$\boxed{\begin{array}{l} p: R \longrightarrow R \\ p(x)=x-[x] \quad , \quad x \in R \end{array}}$$

دوره تناوب g کوچکترین مضرب مشترک $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ است لذا $T = 1$.

نمودار تابع جزء صحیح. با استفاده از تعریف تابع جزء صحیح داریم:

$$E(x) = [x] = \begin{cases} \dots\dots & \\ -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \dots\dots & \end{cases}$$

نمودار تابع در شکل زیر رسم شده است:



به لحاظ تشابه شکل تابع جزء صحیح به پلکان، آنرا **تابع پله‌ای** نیز می‌نامند.

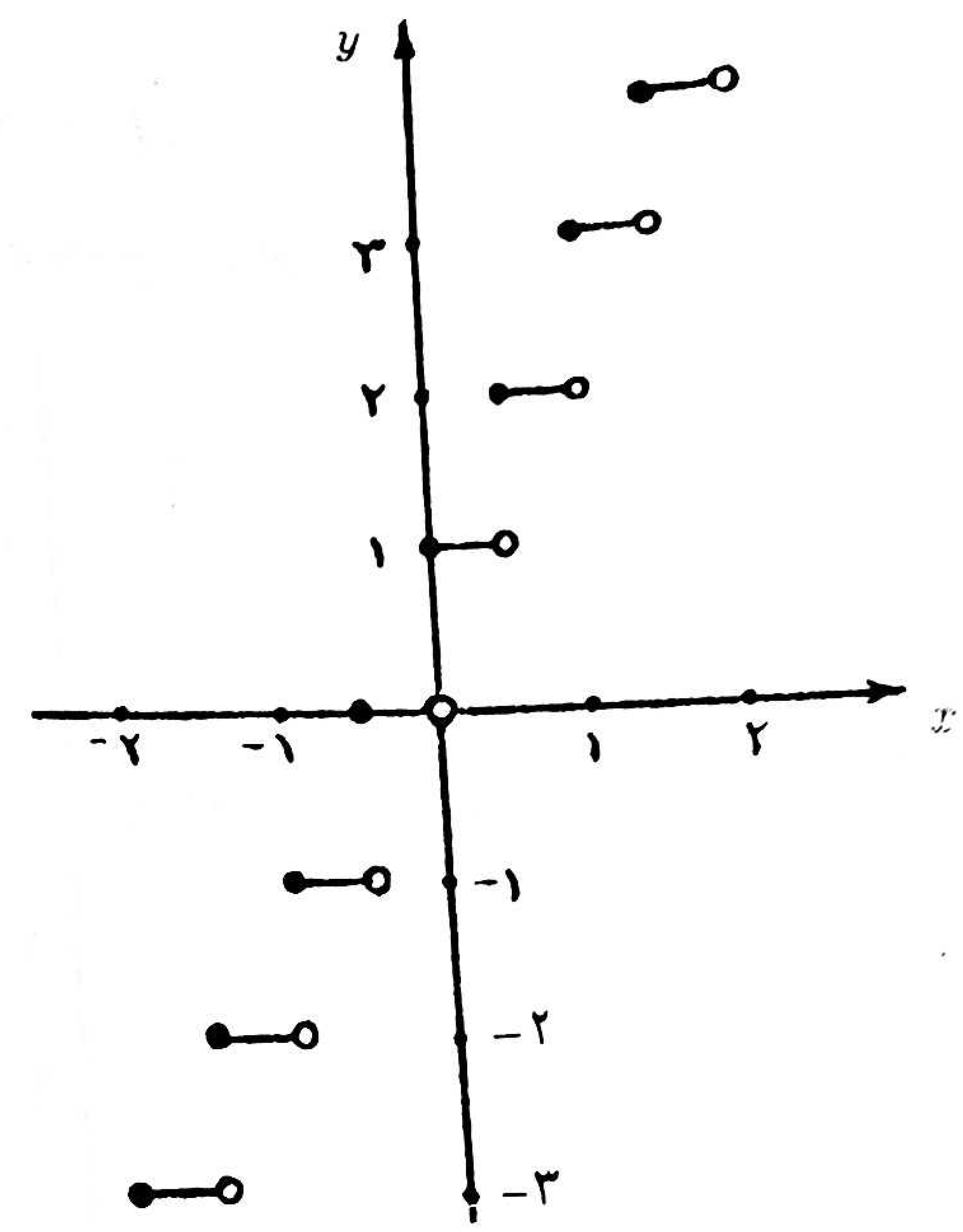
مثال ۹۸ : فرض کنیم تابع $f : [-2, 2] \longrightarrow Z$ با ضابطه $f(x) = [2x + 1]$ داده شده است. در این صورت:

$$f(x) = [2x + 1] = n \iff n \leq 2x + 1 < n + 1 \iff \frac{n-1}{2} \leq x < \frac{n}{2}$$

و از طرفی هرگاه $\frac{n-1}{2} = -2$ آنگاه $n = -3$ و اگر $\frac{n}{2} = 2$ آنگاه $n = 4$ پس مقادیر n اعداد صحیح از ۳- تا ۴ است و بنابراین:

$$f(x) = n \iff \frac{n-1}{2} \leq x < \frac{n}{2} \qquad n = -3, -2, \dots, 4$$

$$f(x)=\begin{cases} -3 , & (-2 \le x < \frac{-3}{2} \quad n=-3) \\ -2 , & (\frac{-3}{2} \le x < -1 \quad n=-2) \\ -1 , & (-1 < x < \frac{-1}{2} \quad n=-1) \\ 0 , & (\frac{-1}{2} \le x < 0 \quad n=0) \\ 1 , & (0 \le x < \frac{1}{2} \quad n=1) \\ 2 , & (\frac{1}{2} \le x < 1 \quad n=2) \\ 3 , & (1 \le x < \frac{3}{2} \quad n=3) \\ 4 , & (\frac{3}{2} \le x < 2 \quad n=4) \end{cases}$$



مثال ۹۹ : فرض کنیم $f : [-2,2] \longrightarrow Z$ با $f(x) = [x^2]$ داده شده است. نمودار f را رسم کنید.

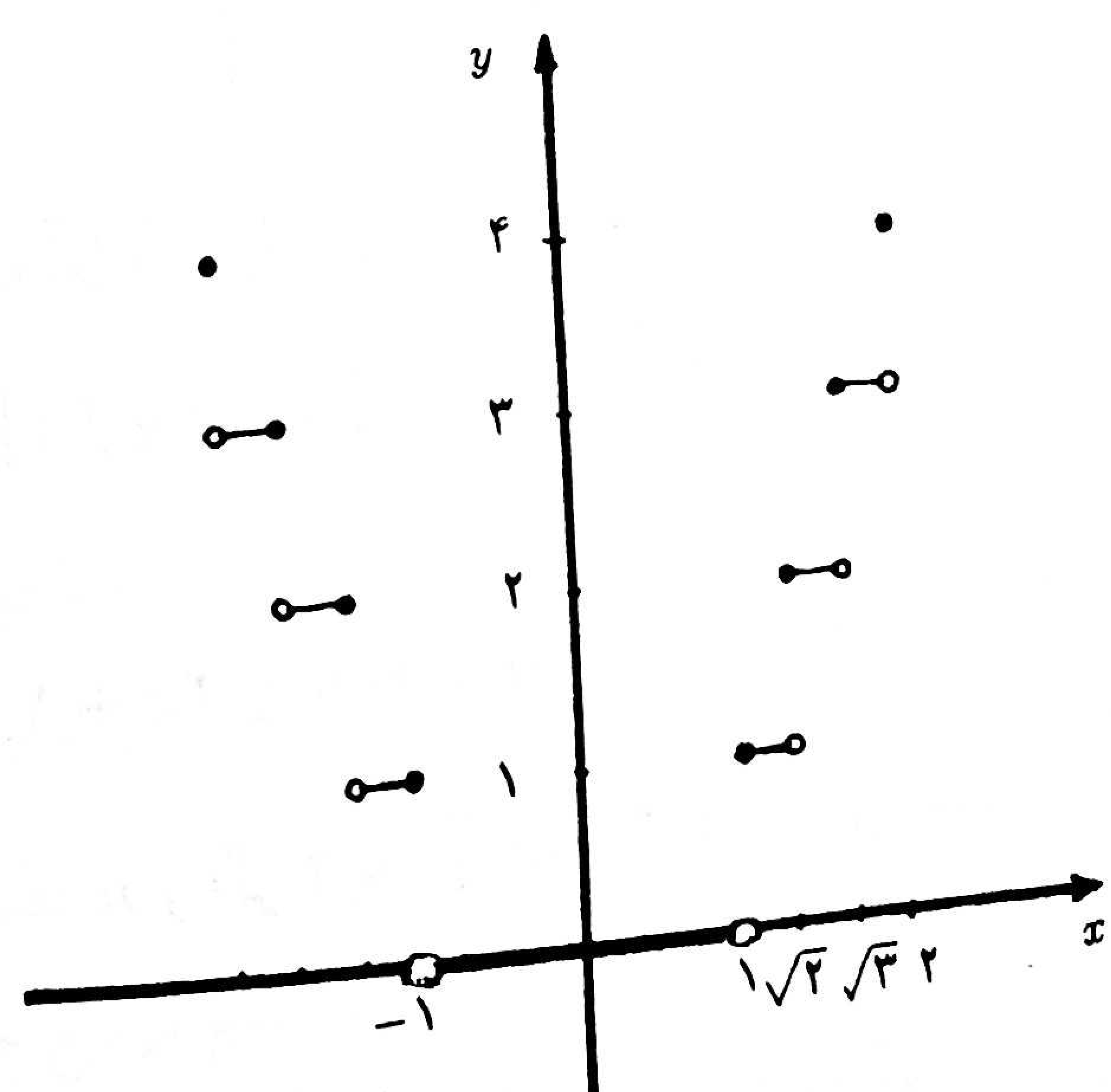
حل ـ ابتدا ملاحظه می‌شود که تابع f تابعی زوج است لذا نمودار آن نسبت به محور yها متقارن است پس کافیست در بازه $[0,2]$ نمودار آنرا رسم کنیم:

$$f(x) = [x^2] = n \Longrightarrow n \le x^2 < n+1 \Longleftrightarrow \sqrt{n} \le x < \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n} = 0 \Longrightarrow n = 0 \qquad \& \qquad \sqrt{n+1} = 2 \Longrightarrow n = 3$$

حال با توجه به اینکه f زوج است، ضابطه و نمودار آن چنین تعیین می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} 4 & x=-2 \\ 3 & -2 < x \le -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3} < x \le -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} < x \le -1 \\ 0 & -1 < x \le 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

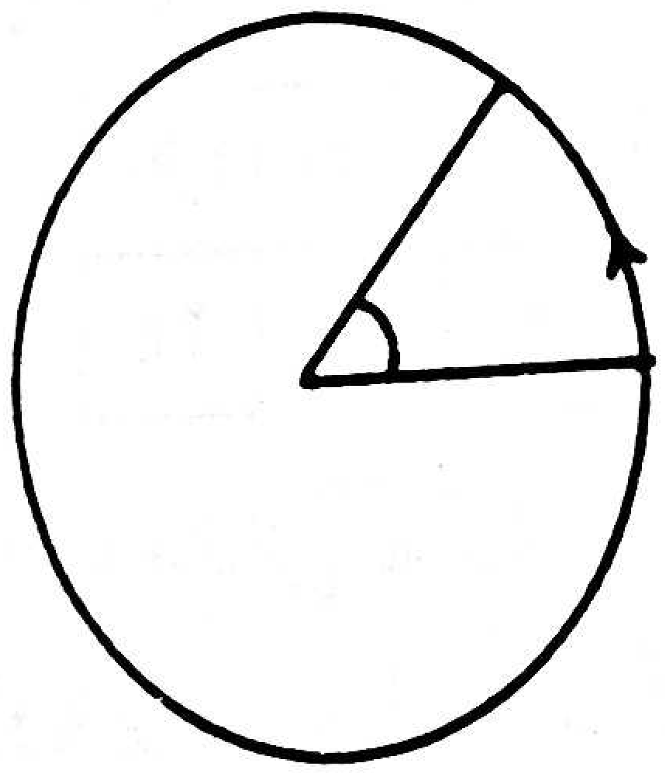


۷

توابع مثلثاتی

۱.۷ مقدمه

دایرهٔ مثلثاتی. دایره‌ای به شعاع واحد که روی آن جهتی اختیار شده باشد را در نظر می‌گیریم. جهت مثبت مثلثاتی را خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تعریف می‌کنیم. نقطـه‌ای مانند A روی محیط دایره به عنوان مبـــداء می‌گیریم این دایره، دایرهٔ مثلثاتی نامیده می‌شود.



واحدهای اندازه‌گیری کمان و زاویه

الف. $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را یک **درجه** نامیده و با D نشان می‌دهند.

ب. $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را یک **گراد** نامیده و با حرف G نشان می‌دهند.

ج. طول کمانی از دایره که اندازه‌اش برابر شعاع دایره باشد را یک **رادیان** گویند و با حرف R نشان می‌دهند.

ملاحظه می‌شود که در هر دایره:

۲π رادیان = ۴۰۰ گراد = ۳۶۰ درجه

لذا اگر G, D و R به ترتیب اندازه کمان بر حسب درجه، گراد و رادیان باشد آنگاه:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}}$$

معمولاً برای نمایش درجه از علامت «°» استفاده می‌شود.

مثال ۱ : هرگاه $D = ۳۰°$ آنگاه:

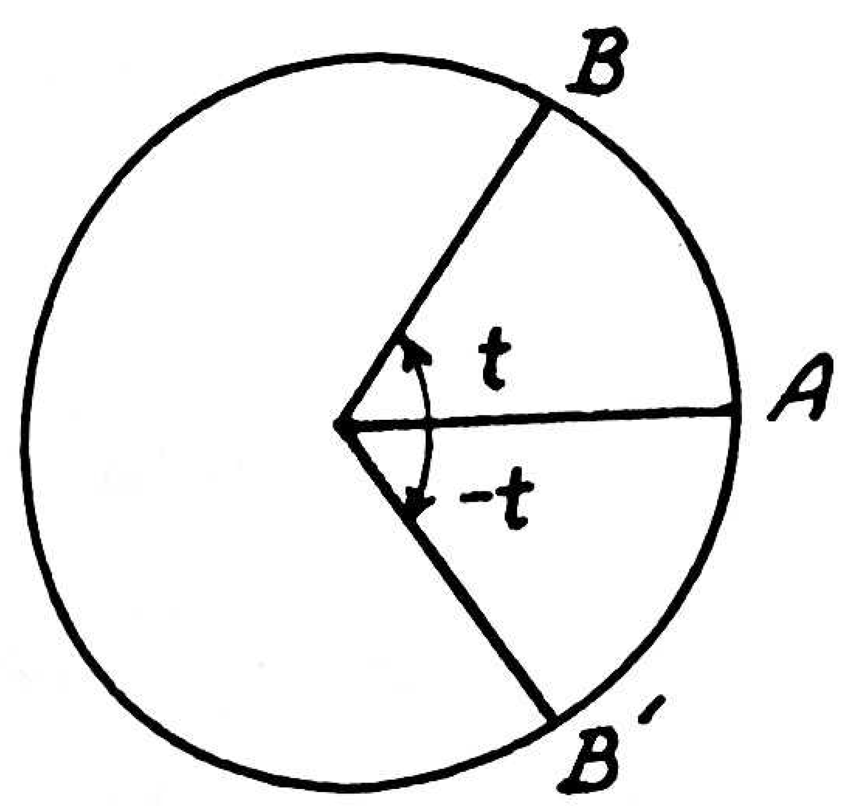
$$\frac{R}{\pi} = \frac{۳۰}{۱۸۰} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۶} \qquad G = \frac{۲۰۰}{۱۸۰} \times ۳۰ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

پس اگر در دایره مثلثاتی اندازه کمان $\widehat{AB}$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ باشد، آنگاه اندازه زاویه $\angle AOB$ برحسب درجه برابر ۳۰° و برحسب گراد برابر $\frac{۱۰۰}{۳}$ است.

تبصره: اگر طول قوس دایره پیموده شده توسط A برابر s باشد ($|OA| = ۱$)، آنگاه t اندازه زاویه $\angle AOB$ برحسب رادیان عبارتست از:

الف ـ $t = s$ اگر دوران در جهت مثبت باشد.

ب ـ $t = -s$ اگر دوران در جهت منفی باشد.

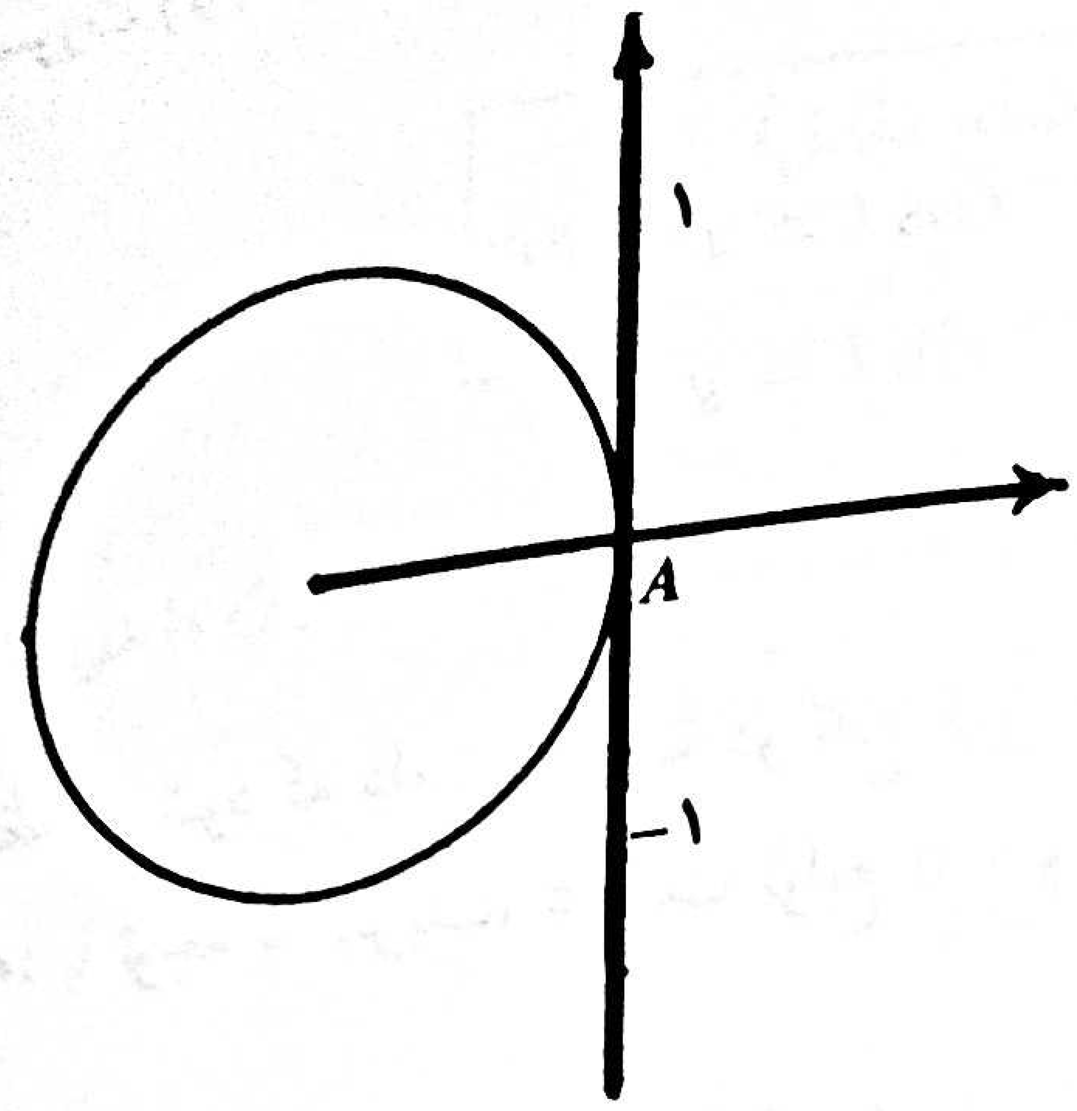


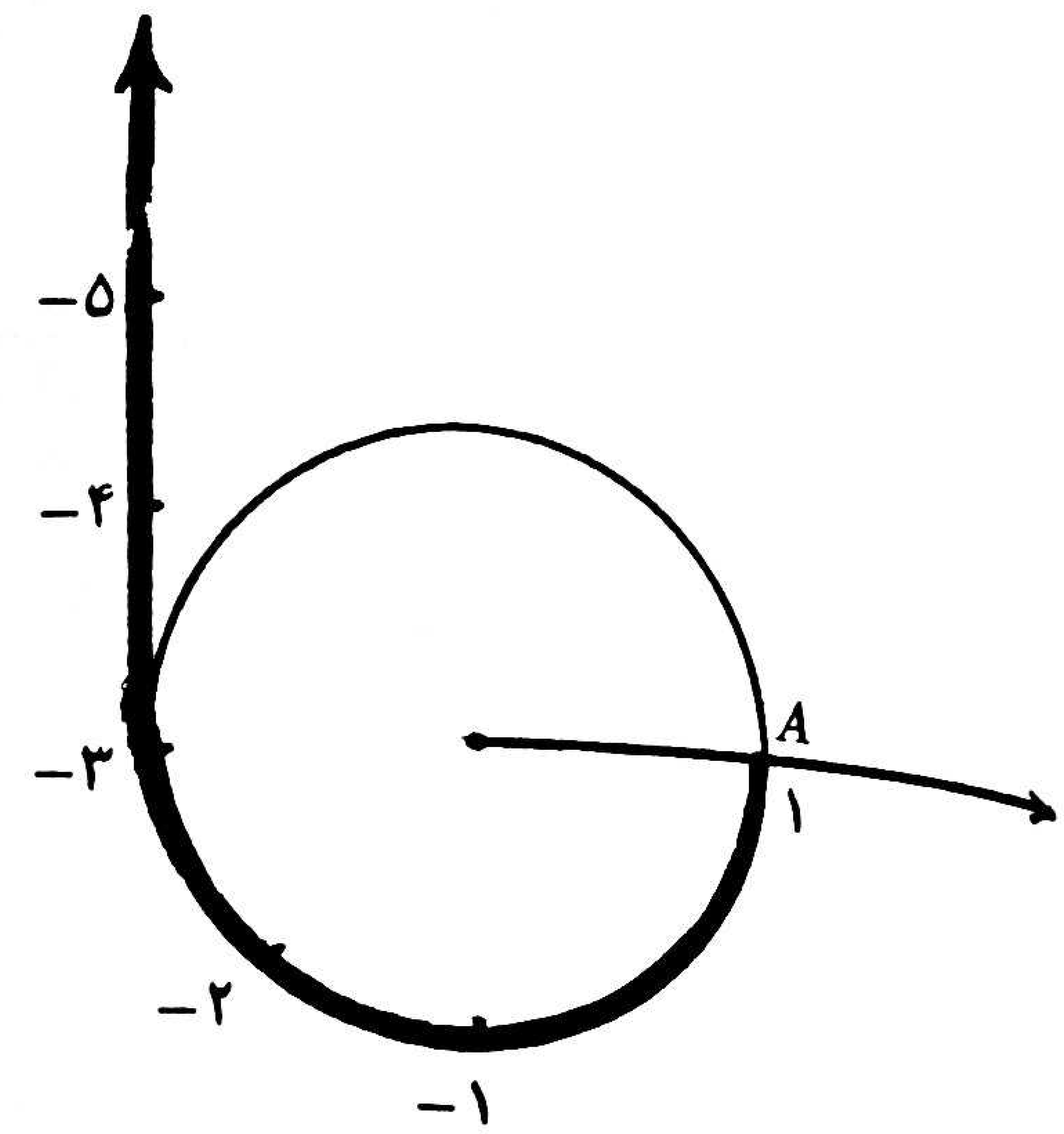
اندازه چند زاویه برحسب رادیان و درجه که زیاد مورد استفاده‌اند، عبارتست از:

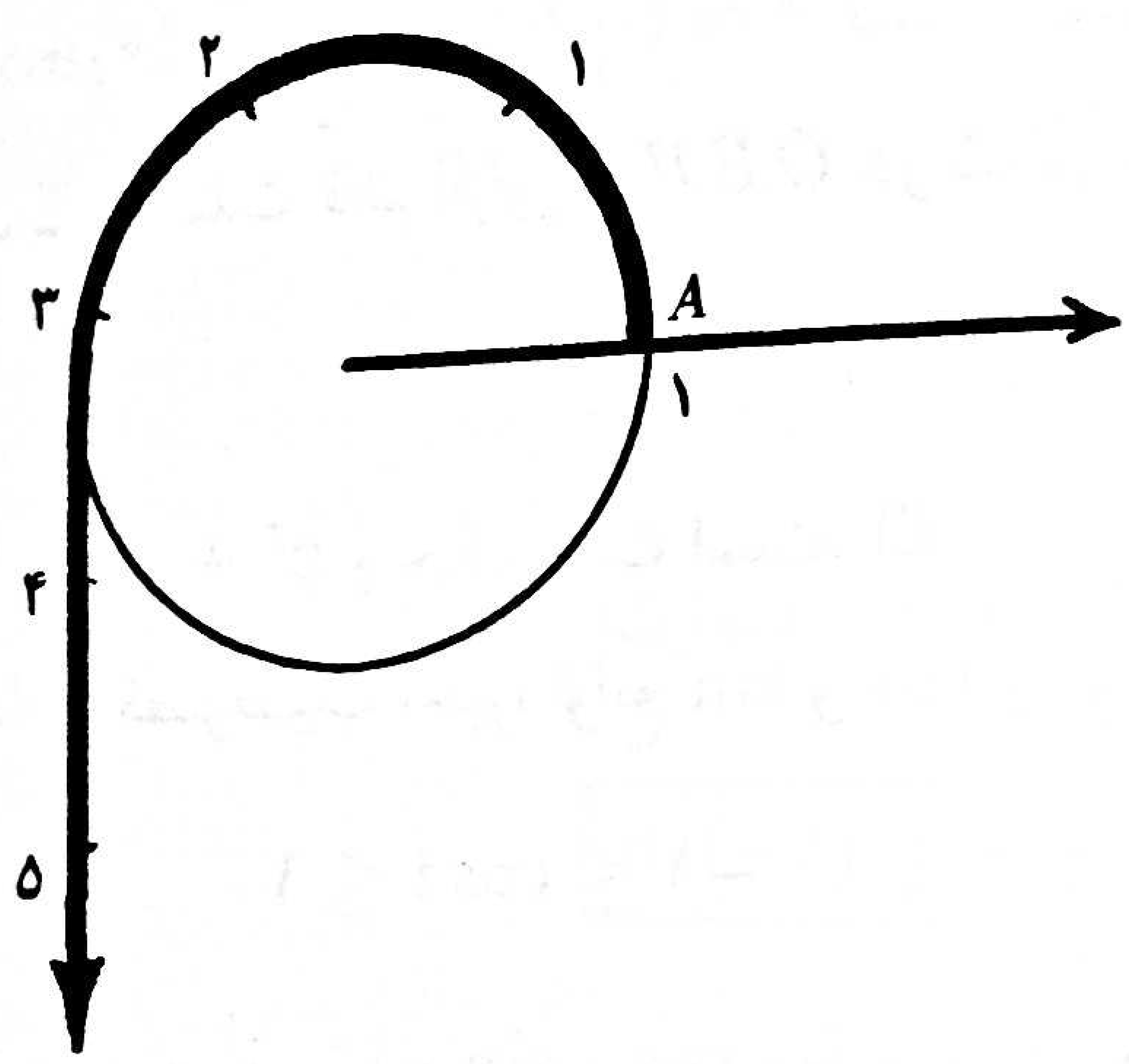
اندازه برحسب درجه	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
اندازه برحسب رادیان	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

هرگاه دایره مثلثاتی به مرکز $(۰,۰)$ و مبداء $A(۱,۰)$ اختیار شود آنگاه به هر عدد حقیقی دلخواه t، یک زاویه برحسب رادیان می‌توان نسبت داد. هرگاه t مثبت باشد یک زاویه در جهت مثبت و اگر t منفی باشد یک زاویه در جهت منفی مثلثاتی می‌توان نسبت داد. اشکال زیر این مطلب را بهتر مجسم می‌کنند:

نخی بطول s و ضخامت صفر (!؟) را در جهت مثبت مثلثاتی دور دایره می‌پیچانیم. انتهای نخ زاویه مثبت مثبت t برحسب رادیان را مشخص می‌کند.

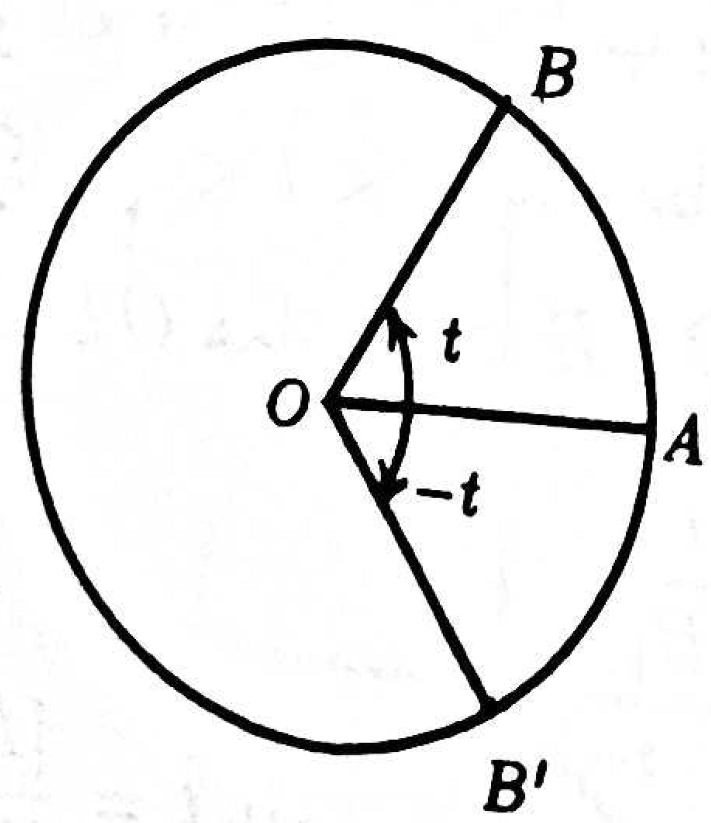






مثال ۲ : هرگاه $t = ۷/۳۳۰۳$ آنگاه بطور تقریبی داریم:

$$t \simeq ۲\pi + \frac{\pi}{۳}$$

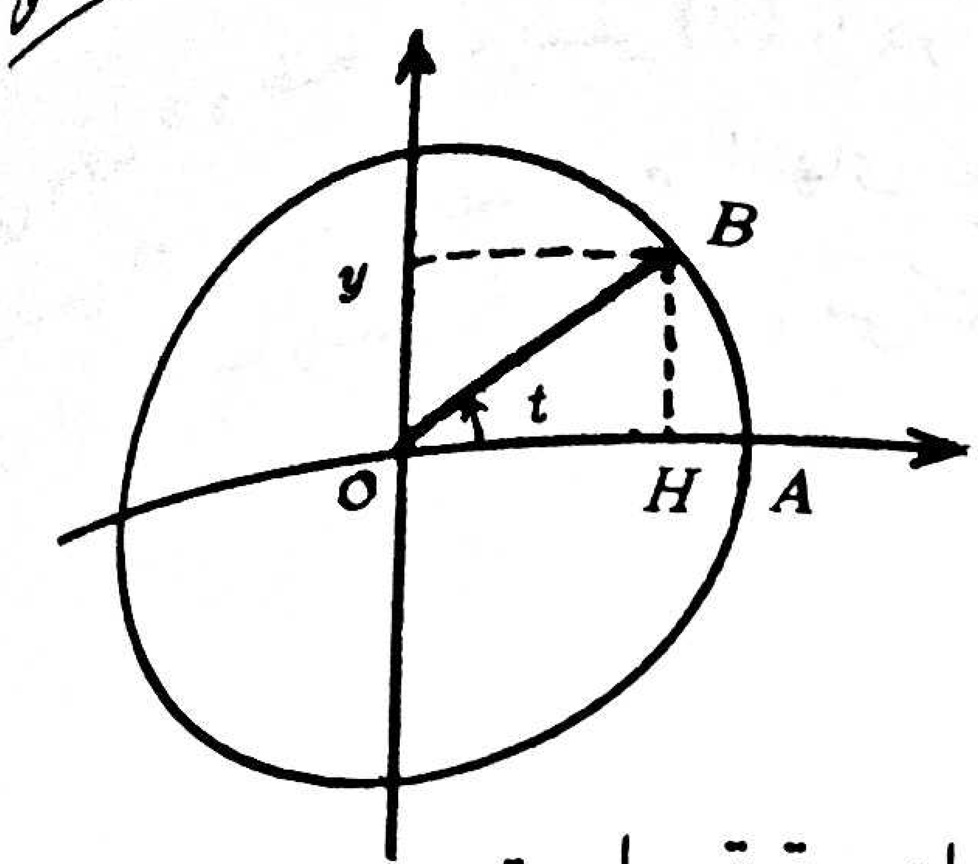


لذا زاویه $\angle AOB$ نظیر t در شکل معین می‌شود. هرگاه $t = -۷/۳۳۰۳$ آنگـاه جهت حرکت در خـلاف جهـت مثلثاتی است و $\angle B'OA$ مانند شکل معین می‌شود.

۲-۷ توابع cos و sin

تعریف دایره مثلثاتی به مرکز $O(۰,۰)$ و مبداء $A(۱,۰)$، مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم t یک عدد حقیقی دلخواه و $\angle AOB$ زاویه‌ای به اندازه t رادیان باشد. هرگاه مختصات نقطه B

به صورت $B(x,y)$ باشد آنگاه تعریف می‌کنیم:



$$\cos t = x$$
$$\sin t = y$$

ملاحظه می‌شود که دامنه تعریف دو تابع فوق مجموعه تمام اعداد حقیقی است.

مسأله: با توجه به تعریف، علامت توابع sin و cos را در هر ناحیه مشخص کنید.

قضیه ۷-۱ به ازای هر عدد حقیقی t داریم:

$$\boxed{\sin^۲ t + \cos^۲ t = ۱}$$

اثبات ـ در مثلث قائم الزاویه OBH در شکل بالا بنابر رابطه فیثاغورس داریم:

$$|OH|^۲ + |BH|^۲ = |OB|^۲ = ۱$$

لذا $x^۲ + y^۲ = ۱$ و حکم ثابت است. □

به لحاظ خصوصیت اخیر، توابع sin و cos را توابع دایره‌ای می‌نامند. از قضیه قبل نتیجه می‌شود:

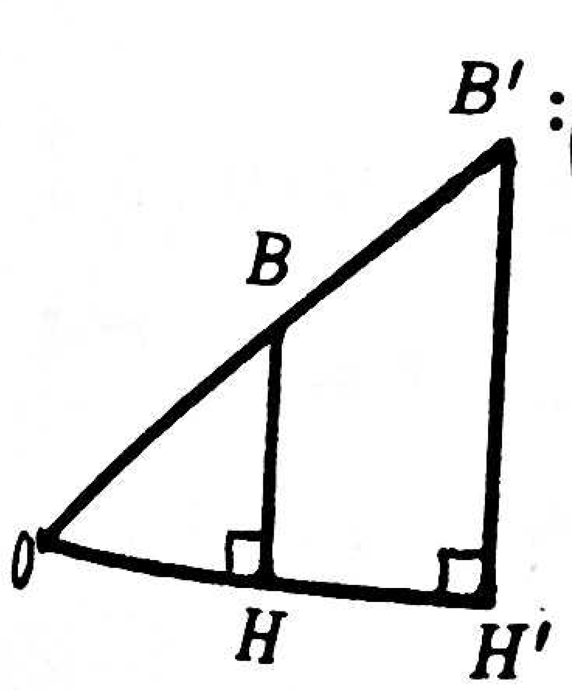
$$\forall t \in R \quad : \quad -۱ \leq \sin t \leq ۱ \quad , \quad -۱ \leq \cos t \leq ۱$$

همچنین از تعریف توابع sin و cos معلوم می‌شود که:

$$\boxed{\sin(۲\pi + t) = \sin(t)} \quad و \quad \boxed{cos(۲\pi + t) = cos(t)}$$

لذا هر دو تابع فوق توابعی متناوب با **دورهٔ تناوب** ۲π می‌باشند.

توجه: هرگاه $\circ < t < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه مطابق تعریف، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم:



(مثلث OBH همان مثلث OBH در شکل قبلی است و $OB = ۱$):

$$\sin t = |HB| = \frac{|HB|}{|OB|}$$

لذا $\sin t = \frac{|HB|}{|OB|}$ و به همین ترتیب $\cos t = \frac{|OH|}{|OB|}$. حال اگر مثلث $OB'H'$ مثلثی قائم‌الزاویه مطابق شکل باشد، آنگاه بنابر تشابه دو مثلث فوق داریم:

$$\frac{|B'H'|}{|OB'|} = \frac{|BH|}{|OB|} = \sin t$$

لذا در هر مثلث قائم الزاویه دلخواه داریم:

$$\boxed{\sin t = \frac{\text{ضلع مقابل}\ \hat{t}}{\text{وتر}}} \quad , \quad \boxed{\cos t = \frac{\text{ضلع مجاور}\ \hat{t}}{\text{وتر}}}$$

در بحث اخیر فرض بر اینست که $1 < |OH'|$. هرگاه $1 > |OH'|$ آنگاه مثلث $OB'H'$ داخل مثلث OBH قرار دارد و مانند قسمت قبل می‌توان همان نتایج را بدست آورد.

مثال ۳ : با عنایت به تعریف توابع sin و cos و شکل داریم:

$\sin(0) = 0 \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \sin(\pi) = 0 \quad \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \quad \sin(2\pi) = 0$

$\cos(0) = 1 \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \cos(\pi) = -1 \quad \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \quad \cos(2\pi) = 1$

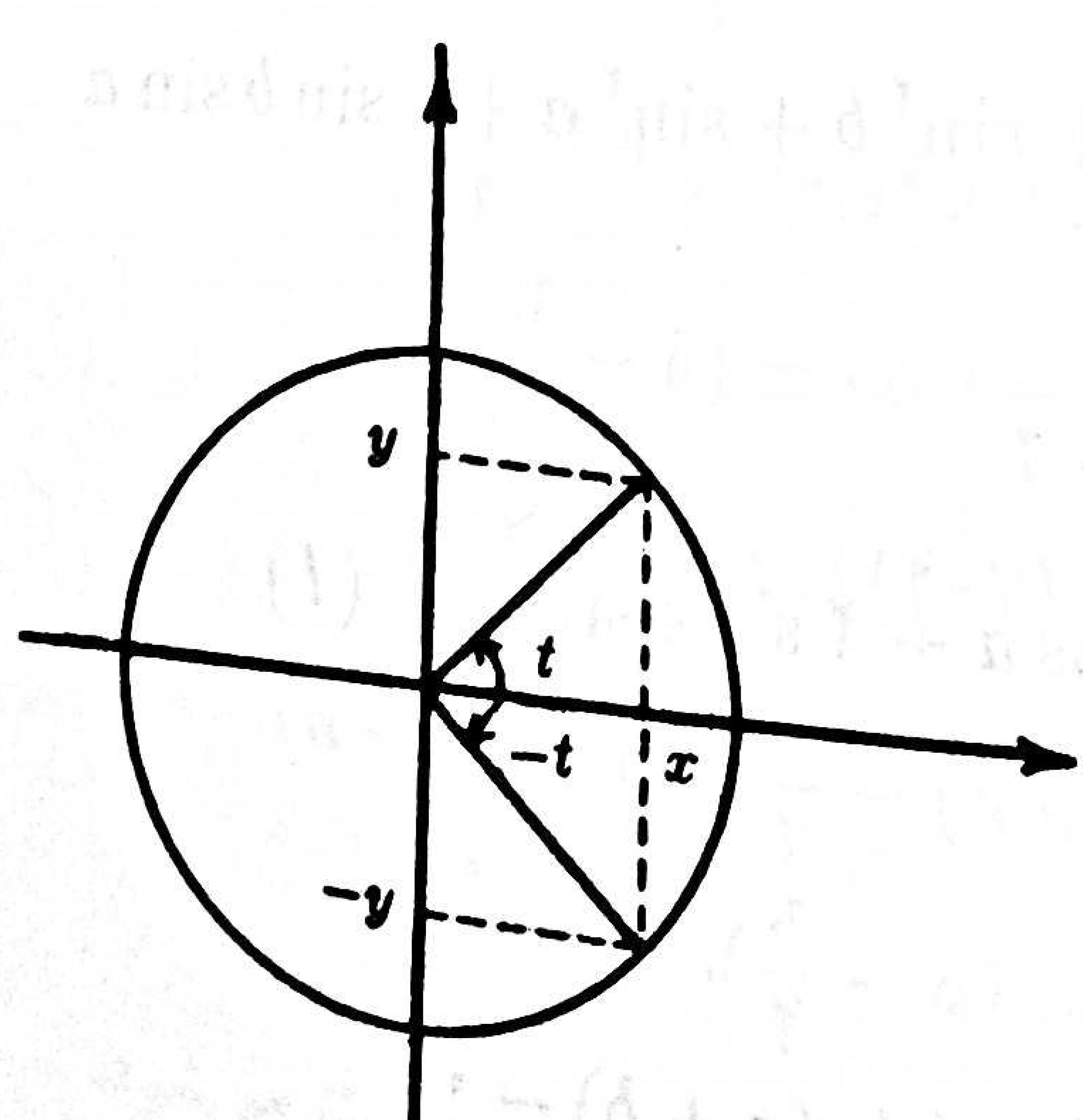
مثال ۴ : دوره تناوب $f(x) = sin\alpha x$ را بیابید:

حل- $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

قضیه ۷-۲ فرض کنیم t یک عدد حقیقی دلخواه باشد، در این صورت:

$\boxed{\sin(-t) = -\sin t}$ تابع sin فرد است

$\boxed{\cos(-t) = \cos t}$ تابع cos زوج است



اثبات - با توجه به شکل داریم:

$x = \sin t$ و $y = \cos t$

آنگاه:

$\sin(-t) = -y = -\sin t$

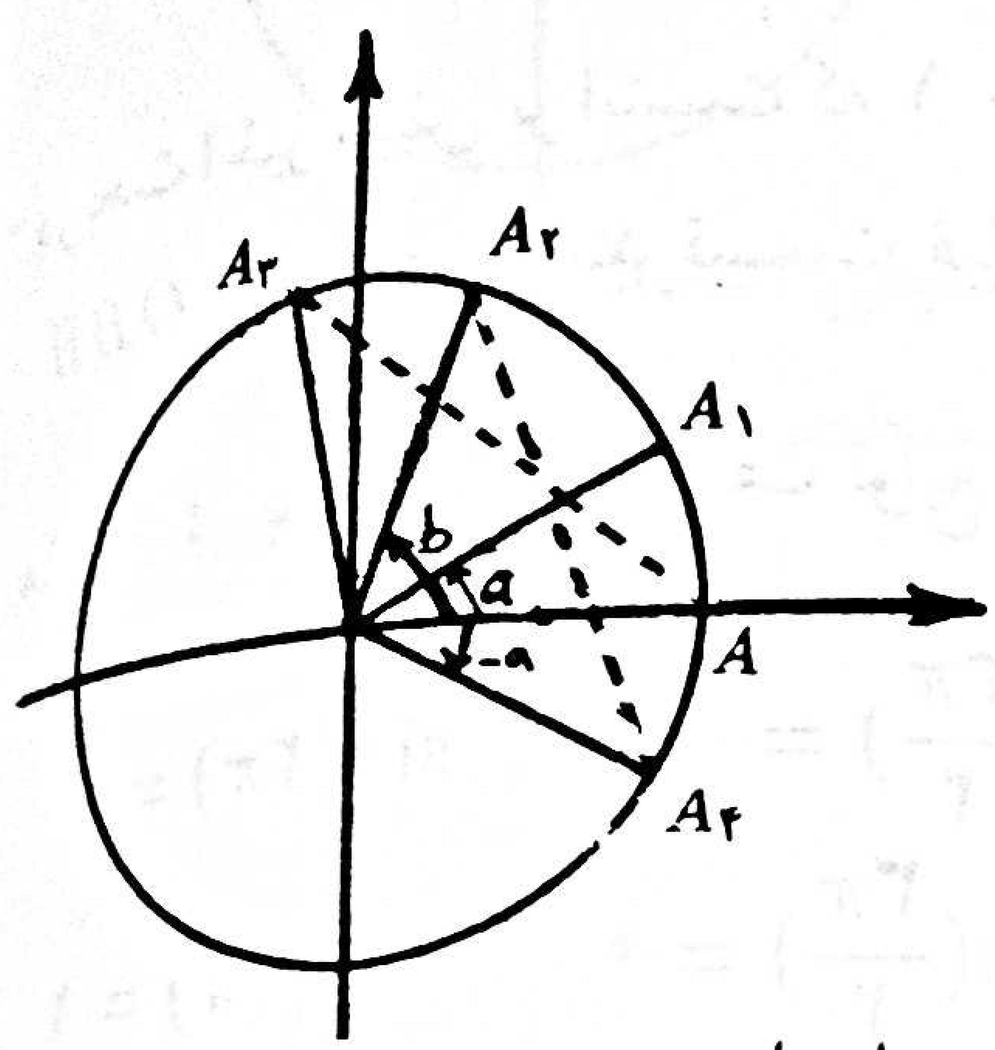
$\cos(-t) = x = \cos t$

و حکم ثابت است.

قضیه ۷-۳ فرض کنیم $b \in R$ و a در این صورت:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

اثبات - فرض کنیم $b > a > ۰$ (در سایر حالتها بنابر از قضیه قبل می‌توان به نتیجه رسید).



نقاط $A_۱(\cos a, \sin a)$، $A_۲(\cos b, \sin b)$

$A_۳(\cos(a+b), \sin(a+b))$ و $A_۴(\cos(-a), \sin(-a))$

را در نظر می‌گیریم (مطابق شکل). بنابراین انتخاب داریم:

$\widehat{A_۲A_۳} = a, \widehat{AA_۱} = a\ ,\ \widehat{AA_۲} = b\ ,\ \widehat{AA_۴} = |-a| = a$

چون: $\widehat{AA_۳} = \widehat{AA_۲} + \widehat{A_۲A_۳}$ لذا: $\widehat{AA_۳} = a + b$

چون: $\widehat{A_۴A_۲} = \widehat{A_۴A} + \widehat{AA_۲}$ پس: $\widehat{A_۴A_۲} = a + b$

ملاحظه می‌شود که $\widehat{AA_۳} = \widehat{A_۴A_۲}$ و بنابراین طول وتری که A را به $A_۳$ وصل می‌کند با طول وتری که $A_۴$ را به $A_۲$ متصل می‌کند برابر است، یعنی:

$$|\overline{A_۴A_۲}| = |\overline{AA_۳}|$$

از فرمول فاصله در هر طرف تساوی اخیر استفاده می‌کنیم:

$$|A_۴A_۲|^۲ = (x_{A_۲} - x_{A_۴})^۲ + (y_{A_۲} - y_{A_۴})^۲ = (\cos b - \cos(-a))^۲ - (\sin b + \sin(-a))^۲$$
$$= \cos^۲ b + \cos^۲ a - ۲\cos b \cos a + \sin^۲ b + \sin^۲(-a) - ۲\sin b \sin(-a)$$

sin تابعی فرد است و cos زوج، پس از ساده کردن داریم:

$$\cos^۲ b + \cos^۲ a - ۲\cos b \cos a + \sin^۲ b + \sin^۲ a + ۲\sin b \sin a$$

بنابراین:

$$|A_۴A_۲|^۲ = ۲ - ۲\cos b \cos a + ۲\sin b \sin a \qquad (I)$$

همچنین:

$$|AA_۳|^۲ = (\cos(a+b) - ۱)^۲ + (\sin(a+b) - ۰)^۲$$
$$= \cos^۲(a+b) + ۱ - ۲\cos(a+b) + \sin^۲(a+b)$$

و بنابراین:

$$|\overline{AA_3}|^2 = 2 - 2\cos(a+b) \qquad (II)$$

طرفین اول در تساویهای (I) و (II) با هم برابرند لذا:

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos b\cos a + 2\sin b\sin a$$

$$\Longrightarrow \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

نتیجه ۷-۴

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b}$$

اثبات ـ در قضیه قبل بجای b قرار می‌دهیم $-b$. □

نتیجه ۷-۵ فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، در این صورت:

الف ـ $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin b}$ و $\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - b) = \cos b}$

ب ـ $\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b}$

ج ـ $\boxed{\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b}$

د ـ $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} + b) = \sin b \ , \ \sin(\pi - b) = \sin b \ , \ \cos(\pi - b) = -\cos b}$

$\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} + b) = -\cos b \ , \ \sin(\pi + b) = -\sin b \ , \ \cos(\pi + b) = -\cos b}$

اثبات ـ (الف)ـ در نتیجه ۷-۴ قرار می‌دهیم $a = \frac{\pi}{2}$ لذا:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - b) = \cos\frac{\pi}{2}\cos b + \sin\frac{\pi}{2}\sin b = 0 + \sin b = \sin b$$

برای قسمت دوم از (الف) بجای b در تساوی اخیر قرار می‌دهیم: $\frac{\pi}{2} - b$.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - b)) = \cos b$$

برای اثبات قسمت (ب) از قسمت (الف) و نتیجه (۷-۴) استفاده می‌کنیم:

$$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = (\cos(\frac{\pi}{2} - a) - b)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} + a)\sin b$$

برای اثبات قسمت (ج) در قسمت (ب) بجای b قرار می‌دهیم $(-b)$ و اثبات می‌شود.

قسمت (د) با استفاده از قسمت (ب) و (ج) و قرار دادن $a = \pi$ و یا $a = \frac{\pi}{2}$ اثبات می‌شود. □

نتیجه ۷-۶ فرض کنیم t, a, b, c و d اعداد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت:

الف - $\boxed{\sin 2t = 2\sin t\cos t}$

ب - $\boxed{\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t}$

پ - $\boxed{\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}}$ $\boxed{\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}}$

ت - تبدیل حاصلضرب $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

ث - به $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

ج - مجموع $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

چ - $\sin c + \sin d = 2\sin\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2}$

ح - تبدیل مجموع $\cos c + \cos d = 2\cos\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2}$

خ - به $\cos c - \cos d = -2\sin\frac{c+d}{2}\sin\frac{c-d}{2}$

د - حاصلضرب $\sin c - \sin d = 2\cos\frac{c+d}{2}\sin\frac{c-d}{2}$

ذ - $\boxed{(\sin t \pm \sin t)^2 = 1 \pm 2\sin t\cos t}$

ر - $\boxed{\sin^6 t + \cos^6 t = 1 - 3\sin^2 t\cos^2 t}$, $\boxed{\sin^4 t + \cos^4 t = 1 - 2\sin^2 t\cos^2}$

ز - $\boxed{\sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t}$

اثبات - قسمتهای (الف) و (ب) با استفاده از قضیه (۷-۳) و نتیجه (۷-۵) $(a = b = t)$ ثابت می‌شود. برای اثبات قسمت (پ) از اتحاد $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ و قسمت (ب) استفاده می‌شود.

برای بدست آوردن (ت) بنابر قضیه داریم:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

و

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

با تفریق طرفین تساویهای اخیر، قسمت (ت) و با جمع کردن آنها، قسمت (ث) ثابت می‌شود. برای اثبات قسمت (ج)، قسمتهای (ب) و (ج) قضیه قبل را با هم جمع می‌کنیم.

برای بدست آوردن روابط موجود در قسمتهای (چ) تا (د) قرار می‌دهیم: $c = a + b$ و $d = c - b$ واین مقادیر را در قسمتهای (ت) و (ث) و (ج) قرار می‌دهیم و ثابت می‌شود.

برای اثبات (ذ) قرار می‌دهیم:

$$(\sin t \pm \cos t)^2 = \sin^2 + t\cos^2 t \pm 2\sin t\cos t = 1 \pm 2\sin t\cos t$$

اثبات (ب): می‌دانیم $(\sin^{۲} t + \cos^{۲} t) = ۱$ لذا:

$$(\sin^{۲} t + \cos^{۲} t)^{۲} = ۱^{۲} \Longrightarrow \sin^{۴} t + \cos^{۴} t + ۲\sin^{۲} t \cos^{۲} t = ۱$$

$$\Longrightarrow \sin^{۴} t + \cos^{۴} t = ۱ - ۲\sin^{۲} t \cos^{۲} t$$

اثبات قسمت دوم (ج).

$$(\sin^{۲} t + \cos^{۲} t)^{۳} = ۱^{۳} \Longrightarrow \sin^{۶} t + ۳\sin^{۴} t \cos^{۲} t + ۳\sin^{۲} t \cos^{۴} t + \cos^{۶} t = ۱$$

$$\Longrightarrow \sin^{۶} t + \cos^{۶} t = ۱ - ۳\sin^{۲} t \cos^{۲} t(\sin^{۲} t + \cos^{۲} t)$$

$$= ۱ - ۳\sin^{۲} t \cos^{۲} t$$

اثبات (د):

$$(\sin^{۴} t - \cos^{۴} t) = (\sin^{۲} t - \cos^{۲} t)(\sin^{۲} t + \cos^{۲} t) = \sin^{۲} t - \cos^{۲} t$$

مثال ۵ : عبارت $A = ۱ - \cos x + \sin x$ را به حاصلضرب تبدیل کنید.

حل - چون $\sin^{۲} \frac{x}{۲} = \frac{۱ - \cos x}{۲}$ پس:

$$A = ۲\sin^{۲} \frac{x}{۲} + \sin x = ۲\sin^{۲} \frac{x}{۲} + ۲\sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲} = ۲\sin \frac{x}{۲}(\sin \frac{x}{۲} + \cos \frac{x}{۲})$$

عبارت داخل پرانتز را می‌توان ساده نمود. برای این منظور داریم:

$$\sin t + \cos t = \frac{۲}{\sqrt{۲}}\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin t + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos t\right] = \frac{۲}{\sqrt{۲}}\left[\cos\frac{\pi}{۴}\sin t + \sin\frac{\pi}{۴}\cos t\right]$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}[\sin(t + \frac{\pi}{۴})]$$

بنابراین:

$$\boxed{\sin t + \cos t = \sqrt{۲}\sin(t + \frac{\pi}{۴})}$$

به همین ترتیب می‌توانید ثابت کنید:

$$\boxed{\sin t - \cos t = \sqrt{۲}\cos(t - \frac{\pi}{۴})}$$

حال عبارت A در مثال (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = \sin\frac{x}{۲}[\sqrt{۲}\sin(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴})] = \sqrt{۲}\sin(\frac{x}{۲}\sin(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴})$$