ریاضی عمومی   دانشکده فنی حر فه ای دختران ولیعصر   مدرس بسته زاده

مفهوم حد و پیوستگی   تعریف حد   حد چپ و راست   قضایای حدد   تعریف حد راست و چپ

فصل دوم) حد و پیوستگی:

مفهوم حد یکی از مفاهیم بسیار مهم ریاضی است و به جرأت می‌توان گفت حد یکی از اساسی‌ترین و قدیمی‌ترین مفاهیم ریاضی است که شالوده و اساس بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضی مانند پیوستگی، مشتق پذیری، انتگرال‌گیری، دنباله‌ها و سری‌ها می‌باشد. و سایر شاخه‌های علوم تجربی و آمار و رشته‌های مهندسی، فیزیك، شیمی، علوم پزشکی و.... و به طور کلی هر جا که ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد حد بیشترین نقش ممکن را دارا می‌باشد. در واقع می‌توان حد را به یك ماشین تعبیر کرد که براساس رفتار و کردار یك تابع در اطراف یك نقطه می‌تواند رفتار مطلوب آن تابع در آن نقطه را تعین نمایید و یا به تعبیری دیگر حد یکی از وسایل و ابزار بسیار مطمئن ریاضی است که براساس دانستن رفتار یك تابع در یك مجموعه بتوان رفتار آن تابع را در نقاط نزدیك به آن مجموعه تعیین نمود.

تعریف حد:

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی باشد که برای تمام مقادیر نزدیک $x=x_0$ مگر خود x_0 تعریف شده باشد. می گوییم حد تابع $f(x)$، وقتی x به سمت x_0 نزدیک می شود، برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

مثال)

$$\text{نشان دهید که } \lim_{x\to -۱}(۲x+۵)=۳$$

حل. فرض کنید $\epsilon > ۰$ دلخواه باشد. طبق تعریف باید $\delta > ۰$ چنان ارائه نماییم که برای هر x (چون حوزه تعریف تابع مورد بحث که چند جمله‌ای است تمام $\mathbb{R}$ است) اگر $۰ < |x-(-۱)| < \delta$ آنگاه $|۲x-۵+۳| < \epsilon$ برای ارائه $\delta > ۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|۲x+۵-۳| < \epsilon \Leftrightarrow |۲x+۲| < \epsilon \Leftrightarrow ۲|x-(-۱)| < \epsilon \Leftrightarrow |x-(-۱)| < \frac{\epsilon}{۲} \quad (۳.۴)$$

بدین‌ترتیب کافی است $۰ < \delta \leq \frac{\epsilon}{۲}$ در نظر بگیریم. چون در این صورت اگر $\delta > |x-(-۱)|$ آنگاه بنا به انتخاب δ، چون $\delta \leq \frac{\epsilon}{۲}$ پس داریم $|x-(-۱)| < \frac{\epsilon}{۲}$ که بنابه آنچه در بالا ($\boxed{۳.۴}$) آمد داریم

$$|۲x-۵+۳| < \epsilon$$

با استفاده از تعریف حد داریم:

<u>مثال)</u>

$$)\quad \lim_{x\to ۳}\ (x^{۲}-۱۰x)=-۲۱$$

$$\left|x^{۲}-۱۰x+۲۱\right|=\left|x-۷\right|\,\left|x-۳\right|$$

$$-۱\langle x-۳\langle ۱ \qquad \Rightarrow \qquad ۲\langle x\langle ۴ \quad \Rightarrow \quad \max\left|x-۷\right| = \left|۴-۷\right| = ۳$$

کافی است $\delta \le \min\left\{۱,\dfrac{\varepsilon}{۳}\right\}$ در نظر گرفته شود.

مثال)

فرض کنید n عددی طبیعی باشد در این صورت نشان دهید $\lim_{x\to ۰} \sqrt[n]{۱+x} = ۱$.

حل. با استفاده از قضیه فشار، داریم

اگر $-۱ < x < ۱$ (که یك همسایگی از ۰ است). آنگاه

$$
\begin{aligned}
|x| < ۱ &\Rightarrow ۰ < ۱ - |x| < ۱ \\
&\Rightarrow ۰ < (۱ - |x|)^n \leq ۱ - |x| < ۱ + x \\
&\Rightarrow ۱ - |x| < \sqrt[n]{۱+x}
\end{aligned}
$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
۱ < ۱ + |x| &\Rightarrow (۱ + |x|)^n \geq ۱ + |x| \geq ۱ + x > ۰ \\
&\Rightarrow ۱ + |x| \geq \sqrt[n]{۱+x}
\end{aligned}
$$

بنابراین تا کنون نشان دادهایم که اگر $x \in (-۱, ۱)$ آنگاه

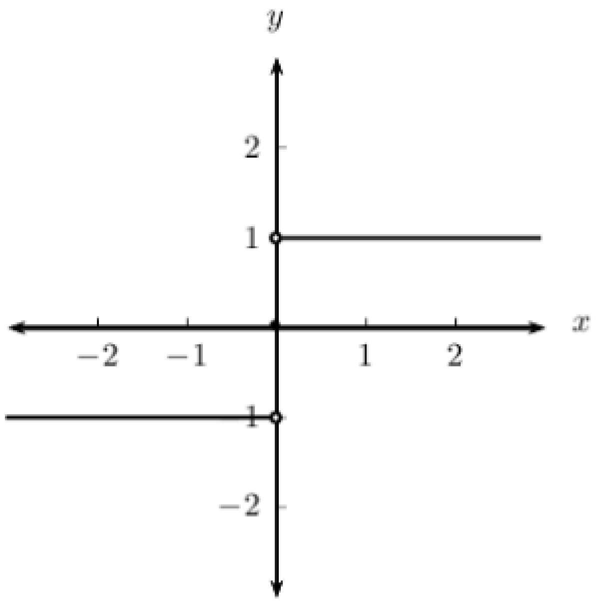
$$۱ - |x| \leq \sqrt[n]{۱+x} \leq ۱ + |x|$$

امّا $\lim_{x\to ۰}(۱ - |x|) = \lim_{x\to ۰}(۱ + |x|) = ۱$ پس بنا به قضیه فشار داریم

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt[n]{۱+x} = ۱$$

حد چپ و راست

در مطالعه مفهوم حد به توابعی همچون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ برمی‌خوریم. این تابع دارای نمودار زیر است:



قضایای حد :

1) f(x)=k تابع ثابت ➔ $\lim_{x \to a} f(x) = k$

2) f(x)=x تابع همانی ➔ $\lim_{x \to a} f(x) = a$

3) f(x)= ax+b ➔ $\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0 + b$

نتیجه: حد توابع چندجمله ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در x_0

مثال) $f(x) = ۳x^۳ - ۲x^۲ + x - ۱$

$$\lim_{x \to -۲} f(x) = ۳(-۲)^۳ - ۲(-۲)^۲ + (-۲) - ۱ = -۳۵$$

مثال هایی از قضیه های حد

نتیجه: حد توابع چندجمله ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در x_0

مثال) $f(x) = ۳x^۳ - ۲x^۲ + x - ۱$

$$\lim_{x \to -۲} f(x) = ۳(-۲)^۳ - ۲(-۲)^۲ + (-۲) - ۱ = -۳۵$$

نکته: در توابع کسری اگر $x \to a$ میل کند و a ریشه مخرج نباشد، حد تابع برابر است با مقدار تابع در آن نقطه(x_0)

مثال) $f(x) = \dfrac{۲x}{x-۱} \longrightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) = \dfrac{۴}{۲-۱} = ۴$

تعریف حد راست و چپ:

فرض کنید که f یک تابع باشد در این صورت گوییم که حد راست تابع f در نقطه x_0 برابر b است یا تابع f به b میل می‌کند وقتی x از راست به x_0 میل می‌کند و آن را با نماد $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم. هرگاه برای هر $\epsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x\in D_f$ اگر $0<x-x_0<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$، که به صورت همسایگی تعریف فوق را می‌توان این طور بیان کرد که برای هر $\epsilon>0$، بازه $D=(x_0,x_0+\delta)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$، داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$.

به طریق مشابه داریم که حد چپ تابع f در نقطه x_0 برابر b است هرگاه برای هر $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ موجود باشد که برای هر $x\in D_f$، اگر $0<x_0-x<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\epsilon$ و یا به عبارت دیگر برای هر $\epsilon>0$، بازه $D=(x_0-\delta,x_0)$ موجود باشد که برای هر $x\in D\cap D_f$ داشته باشیم $|f(x)-b|<\epsilon$، حد چپ تابع f در نقطه x_0 را با نماد $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

۱) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{[x-4]}{x-[x]}$

حل:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{[x]-4}{x-[x]} = \lim_{x \to 4^+} \frac{[4+\delta]-4}{4+\delta-[4+\delta]} = \lim_{x \to 4^+} \frac{4-4}{4+\delta-4} = \frac{0}{\delta} = 0$$

(

$$\lim_{x \to (-\frac{1}{5})^-} f(x) = \lim_{x \to (-\frac{1}{5})^-} \frac{[5x+1]}{5x+1} = \lim_{x \to (-\frac{1}{5})^-} \frac{[5x]+1}{5x+1} = \lim_{\to (-\frac{1}{5})^-} \frac{\left[5(\frac{-1}{5})^-\right]+1}{5(\frac{-1}{5})^- + 1} = \lim_{\to (-\frac{1}{5})^-} \frac{[-1-\delta]+1}{-1-\delta+1} = \lim \frac{-2+1}{-\delta} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

قضیه مهم در رابطه با وجود حد یک تابع

قضیه ۳ شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ آن است که

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = b$$

- مثال در رابطه با تابع چند ضابطه ای   در مثال زیر قسمت سوم ضابطه را مقدار b-5x- بگیرید.

فـرض کنیـد: $f(x)=\begin{cases} ۲x-a & x<-۳ \\ ax+۲b & -۳\le x\langle ۳ \\ b-\theta\, x & ۳<x \end{cases}$ a و b را طـوری تعیـین کنیـد کـه $\lim f(x)$ و $\lim f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a+۳b=-۱۵ \\ -۲a+۲b=-۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۵ \\ -a+b=-۳ \end{cases} \Rightarrow ۲b=-۸$$

$$\Rightarrow b=-۴ \qquad a=-۱$$

- در موارد زیر برای محاسبه حد تابع، ابتدا باید حد چپ و راست را محاسبه نمود

۱)**حد توابع چند ضابطه ای**

۲)**حد توابع قدرمطلقی** (a ریشه معادله f(x)=0 باشد)

$$\lim_{x \to a} |f(x)|$$

۳)**حد توابع جز صحیح**

$$\lim_{x \to a} [x] \quad , a \in z$$

۴)**حد توابع کسری و a ریشه مخرج باشد.**

$$\lim_{x \to a} \frac{A}{f(x)}$$

۵)**حد توابع اصم با فرجه زوج**

$$\lim_{x \to a} \sqrt[2k]{f(x)}$$

تذکر مهم:

**تذکر: در این حالت ابتدا باید f(x) را تعیین علامت کنیم،چون ممکن است یکی از حدود چپ و راست به علت منفی بودن f(x) موجود نباشد.

۶)حد تانژانت و کتانژانت وقتی که:

$$\lim \tan(x) \quad , \quad \lim \cot(x)$$

$$x \to k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , \quad x \to k\pi$$

مثال ها:

۱) $\lim\limits_{x \to ۳} [x]$

$$\lim_{x \to 3^+} [x] = 3$$

$\Rightarrow$ **تابع حد ندارد.**

$$\lim_{x \to 3^-} [x] = 2$$

۲) $\lim\limits_{x \to ۱} [۲x + ۱]$

$$\lim_{x \to ۱^+} [۲x + ۱] = ۳$$

$\Rightarrow$ تابع حد ندارد.

$$\lim_{x \to ۱^-} [۲x + ۱] = ۲$$

۳) $\lim\limits_{x \to ۱} [۳ - ۲x] = ۳ + \lim\limits_{x \to ۱} [- ۲x]$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

تذکر:

توجه: اگر $a \in z$ نباشد آنگاه حد $[x]$ برابر است با حد $[a]$

$$\lim_{x \to a^-}[x] = \lim_{x \to a^+}[x] = [a]$$

$$۴)\quad \lim_{x \to ۵} \frac{|x-۵|}{۵-x} \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$۵)\quad \lim_{x \to ۱^+} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \frac{(-۱)^۱}{۱-۲} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

$$۶)\quad \lim_{x \to ۱^-} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \frac{(-۱)^۰}{۱-۲} = \frac{۱}{-۲} = -۱$$

$$۷)\quad \lim_{x \to ۲^-} \frac{x-|۲-x|-۲}{x-۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x-(۲-x)-۲}{x-۲} = \lim \frac{۲x-۴}{x-۲} = ۲$$

$$۸)\quad \lim \frac{\sin x}{\sin ۲x} = \lim \frac{\sin x}{x} \times \frac{۲x}{\sin ۲x} \times \frac{۱}{۲} = ۱ \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۹)\quad \lim_{x \to ۱} \frac{\sin(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱}(x+۱)\frac{\sin(x^۲-۱)}{x^۲-۱} = ۲$$

استاد بسته زاده