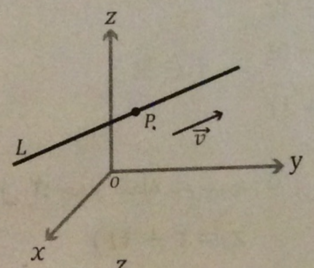
ریاضی جبرانی کارشناسی شیمی

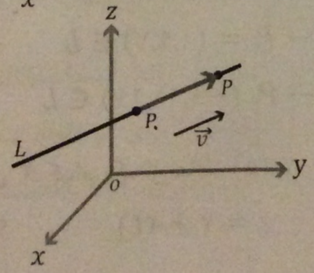
فرخوی.

معادله خط وصفحه.

۲-۱ معادله خط در فضا

مقدمه : معادله خط در صفحه را به کمک یک نقطه و شیب آن می‌نوشتیم و شکل کلی آن به صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ بود، اما معادله خط در فضا را به کمک یک نقطه و امتداد آن می‌نویسیم. منظور از امتداد، برداری است که با خط مورد نظر موازی می‌باشد.





معادله خط : می‌خواهیم معادله خط L را که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد، و با بردار $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle$ موازی است بنویسیم. اگر $P(x,y,z)$ نقطه دلخواه دیگری از خط باشد، بردارهای $\overrightarrow{P_0P}$ و $\vec{v}$ موازیند و لذا عدد حقیقی مانند t موجود است به طوری که: $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{v}$ پس می‌توان نوشت:

$$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = t\langle a,b,c\rangle$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - x_۰ = at \\ y - y_۰ = bt \\ z - z_۰ = ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x_۰ + at \\ y = y_۰ + bt \\ z = z_۰ + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

عبارت اخیر را معادله پارامتری خط می‌گویند.

تذکر: به ازای هر عدد حقیقی t، نقطه‌ای از خط حاصل می‌شود و اگر برای هر نقطه از فضا عددی حقیقی مانند t موجود باشد که به ازای این t، مختصات نقطه در معادله خط صدق کند، آن نقطه روی خط است.

تعریف: در معادله خط بردار $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ را بردار هادی و مقادیر a، b و c راپارامترهای هادی خط می‌نامند (پارامترهای هادی منحصر بفرد نمی‌باشند و هر مضربی از این اعداد را نیز می‌توان به عنوان پارامترهای هادی خط مورد استفاده قرار داد).

مثال ۱: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(۲,۳,۷)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = ۳\vec{i} - ۵\vec{j} + ۲\vec{k}$ موازی است.

حل: مقادیر $(x_۰, y_۰, z_۰) = (۲,۳,۷)$ و $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle = \langle ۳, -۵, ۲ \rangle$ را در معادله زیر قرار می‌دهیم، معادله پارامتری خط به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = x_۰ + at \\ y = y_۰ + bt \\ z = z_۰ + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \begin{cases} x = ۲ + ۳t \\ y = ۳ - ۵t \\ z = ۷ + ۲t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال ۲: چهار نقطه نام ببرید که بر روی خط L به معادله پارامتری زیر واقع باشند.

$$L: (x = ۳ - ۲t \quad , \quad y = ۷ + ۲t \quad , \quad z = ۳ + ۴t)$$

حل:

$$t = ۱ \rightarrow P_۲ = (۱,۹,۷) \in L \qquad t = ۰ \rightarrow P_۱ = (۳,۷,۳) \in L$$

$$t = ۲ \rightarrow P_۴ (-۱,۱۱,۱۱) \in L \qquad t = -۱ \rightarrow P_۳ = (۵,۵,-۱) \in L$$

مثال ۴: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(۲,۱,۰)$ و $B(۴,۲,۵)$ بگذرد.

حل: بردار $\overrightarrow{AB} = \langle ۲,۱,۵ \rangle$ موازی خط می‌باشد. معادله خط به کمک نقطه A و بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$(x = x_۰ + at \ ، \ y = y_۰ + bt \ ، \ z = z_۰ + ct)$$

$$(x = ۲ + ۲t \ , \ y = ۱ + t \ , \ z = ۰ + ۵t)$$

معادله متعارف خط: اگر مقادیر هادی خط یعنی a ، b و c غیر صفر باشند می‌توان t را در معادله پارامتری خط حذف و شکل جدیدی برای معادله خط نوشت:

$$\begin{cases} x = x_۰ + at \rightarrow t = \dfrac{x-x_۰}{a} \\ y = y_۰ + bt \rightarrow t = \dfrac{y-y_۰}{b} \\ z = z_۰ + ct \rightarrow t = \dfrac{z-z_۰}{c} \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_۰}{a} = \frac{y-y_۰}{b} = \frac{z-z_۰}{c}$$

معادله اخیر را معادله متعارف یا معادله متقارن خط می‌نامند.

مثال ۶: معادله متعارف خطی که از نقطه $(۲,۳,-۴)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = \langle ۳,۵,۲ \rangle$ موازی است به صورت زیر است:

$$\frac{x-x_۰}{a} = \frac{y-y_۰}{b} = \frac{z-z_۰}{c} \quad \rightarrow \quad \frac{x-۲}{۳} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{z+۴}{۲}$$

فاصله یک نقطه از خط: فرض کنید L خطی موازی بردار غیر صفر $\vec{v}$ و P نقطه‌ای از فضا باشد. هرگاه $P_۰$ یک نقطه دلخواه خط L باشد و فاصله نقطه P تا خط L را با D نمایش دهیم داریم:

$$D = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_۰P}|}{|\vec{v}|}$$

مثال ۱۰: فاصله نقطه $P(۵,-۶,۲)$ را از خط L به‌دست آورید.

$$L: (x = ۱ \,, y = -۱ + ۴t \,, \; z = ۲ - ۳t)$$

حل: ابتدا نقطه دلخواهی از خط را انتخاب می‌کنیم، با فرض $t = ۰$ داریم: $P_۰(۱,-۱,۲) \in L$ در نتیجه $\overrightarrow{P_۰P} = \langle ۴,-۵,۰ \rangle$. بردار هادی خط L، $\vec{v} = \langle ۰,۴,-۳ \rangle$ است پس:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{P_۰P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۰ & ۴ & -۳ \\ ۴ & -۵ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۵\vec{i} - ۱۲\vec{j} - ۱۶\vec{k}$$

$$D = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_۰P}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{(-۱۵)^۲+(-۱۲)^۲+(-۱۶)^۲}}{\sqrt{(۰)^۲+(۴)^۲+(-۳)^۲}} = \frac{\sqrt{۶۲۵}}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

وضعیت دو خط در فضا: برای دو خط متمایز L_1 و L_2 یکی از سه وضعیت زیر را می‌توان تصور کرد:

موازی: اگر بردارهای هادی دو خط موازی باشند گوییم دو خط موازیند.

متقاطع: اگر دو خط نقطه مشترکی داشته باشند گوییم دو خط متقاطع هستند.

متنافر: اگر دو خط موازی نباشند و نقطه مشترکی هم نداشته باشند گوییم دو خط متنافر هستند.

مثال ۱۱: وضعیت دو خط L_1 و L_2 را نسبت به هم بررسی کنید.

$$L_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{6} \qquad\qquad L_2: \frac{2x+5}{4} = \frac{4y-2}{8} = \frac{z+2}{3}$$

حل: ابتدا بردارهای هادی دو خط را مشخص می‌کنیم. بردار هادی خط L_1 عبارتست از: $\vec{v}_1 = \langle 4,4,6\rangle$. برای مشخص کردن برداری هادی خط L_2 باید آن را به صورت فرمول متعارف خط در آوریم.

$$L_2: \frac{x+\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z+2}{3} \rightarrow \vec{v}_2 = \langle 2,2,3\rangle$$

با مقایسه بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ داریم: $\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2$ پس: $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ در نتیجه دو خط L_1 و L_2 موازی هستند.

مثال ۱۲: وضعیت دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را نسبت به هم بررسی کنید.

$$L_۱: \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۲}{-۱} \quad , \quad L_۲: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{۲}$$

حل: در مورد این دو خط داریم:

$$\overrightarrow{v_۱} = \langle ۲,۱,-۱ \rangle \ , \ \overrightarrow{v_۲} = \langle ۱,-۲,۲ \rangle$$

$$\frac{۲}{۱} \neq \frac{۱}{-۲} = \frac{-۱}{۲} \rightarrow \overrightarrow{v_۱} \nparallel \overrightarrow{v_۲} \rightarrow L_۱ \nparallel L_۲$$

بنابراین ممکن است دو خط متقاطع باشند. برای بررسی این مطلب معـادلات پـارامتری دو خط را در نظر می‌گیریم:

$$L_۱: \begin{cases} x = ۲t + ۲ \\ y = t - ۲ \\ z = -t + ۲ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad L_۲: \begin{cases} x = s + ۱ \\ y = -۲s \\ z = ۲s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

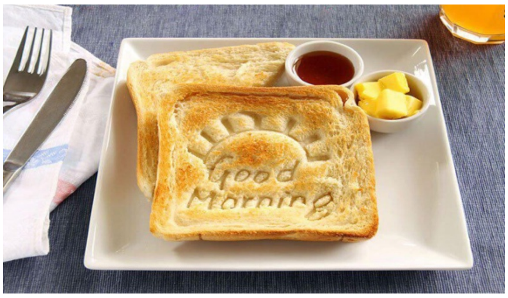
برای متقاطع بودن دو خط، باید دو مقدار حقیقی t و s موجود باشد به طـوری کـه بـه ازای این مقادیر نقطه مشترکی حاصل شود. لذا طرف‌های راست معادلات را مساوی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۲t + ۲ = s + ۱ \\ t - ۲ = -۲s \\ -t + ۲ = ۲s \end{cases}$$

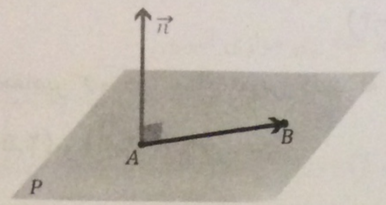
با حل همزمان دو معادله اول داریم:

$$\begin{cases} ۲t - s = -۱ \\ t + ۲s = ۲ \end{cases} \rightarrow (t = ۰ , s = ۱)$$

این دو مقدار در معادله سوم نیز، صدق می‌کند پـس دو خـط متقـاطع هســتند و نقطـه مشترک آنها نقطه $(۲, -۲,۲)$ می‌باشد.



معادله صفحه: فرض کنیم $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیر صفر $\vec{n}=\langle a,b,c\rangle$ بر صفحه عمود باشد.



اگر $B(x,y,z)$ نقطه دلخواه دیگری از صفحه باشد، دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ برهم عمودند و داریم: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=۰$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\langle a,b,c\rangle\cdot\langle x-x_۰,y-y_۰,z-z_۰\rangle=۰$$

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \qquad (*)$$

$$ax+by+cz-(ax_۰+by_۰+cz_۰)=۰$$

معادله * را معادله صفحه می‌نامند اگر به جای مقدار ثابت $ax_۰+by_۰+cz_۰$ عدد $-d$ قرار دهیم معادله صفحه به صورت $ax+by+cz+d=۰$ در می‌آید.

مثال ۱: معادله صفحه‌ای که از نقطه $(-۲,۱,۳)$ می‌گذرد و بردار $\vec{n}=\langle ۲,۵,-۱\rangle$ بر آن عمود است به صورت زیر است.

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

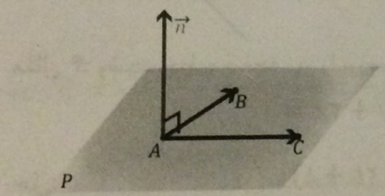
$$\rightarrow ۲(x+۲)+۵(y-۱)-(z-۳)=۰$$

$$\rightarrow ۲x+۵y-z+۲=۰$$

مثال ۳: از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست، یک صفحه می‌گذرد. معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه نقطه زیر باشد.

$A(۱,۲,۳), B(-۲,۳,۱), C(-۱,۴,۲)$

حل: برای نوشتن معادله صفحه نیاز به یک نقطه و برداری قائم بر صفحه داریم. با ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ می‌توان بردار قائم بر صفحه را به‌دست آورد.



$$\overrightarrow{AB} = \langle -۳, ۱, -۲ \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle -۲, ۲, -۱ \rangle$$
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۳ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= ۳\vec{i} + \vec{j} - ۴\vec{k}$$

اکنون با انتخاب یکی از سه نقطه (مثلاً نقطه A) معادله صفحه را می‌نویسیم:

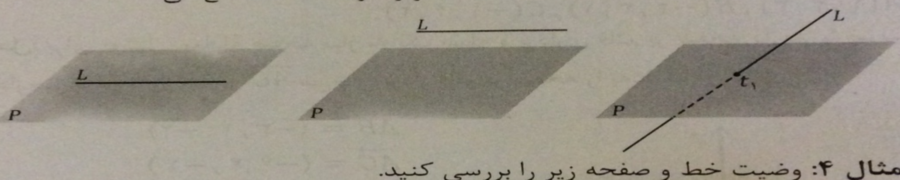
$$a(x - x_{.}) + b(y - y_{.}) + c(z - z_{.}) = ۰$$
$$\to ۳(x - ۱) + (y - ۲) - ۴(z - ۳) = ۰ \to ۳x + y - ۴z = -۷$$

وضعیت خط و صفحه نسبت به هم: برای بررسی وضیت خط L و صفحه P، معادله خط را به صورت پارامتری در آورده و مقادیر به‌دست آمده را در معادله صفحه قرار می‌دهیم، حاصل یک معادله درجه اول با متغیر t خواهد بود. بر حسب تعداد جواب‌های معادله[۱] می‌توان وضعیت خط و صفحه را مشخص کرد. اگر M مجموعه جواب این معادله باشد، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

الف) $M = \mathbb{R}$، خط L در صفحه P قرار دارد.

ب) $M = \emptyset$، خط L و صفحه P نقطه مشترکی ندارند، در این حالت می‌گوییم خط و صفحه موازی هستند.

ج) $M = \{t_۱\}$، خط L و صفحه P همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



مثال ۴: وضعیت خط و صفحه زیر را بررسی کنید.

$$L: \frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۱}{۲} \quad , \quad P: ۲x - y + ۳z = ۱$$

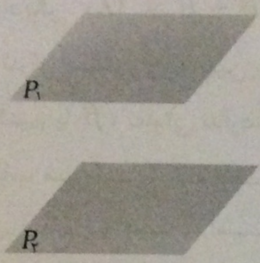
حل:

$$L: (x = ۲t + ۱ \; , \; y = ۳t - ۱ \; , \; z = ۲t + ۱)$$
$$P: ۲(۲t + ۱) - (۳t - ۱) + ۳(۲t + ۱) = ۱$$
$$\to ۷t + ۶ = ۱ \to t = \frac{-۵}{۷}$$

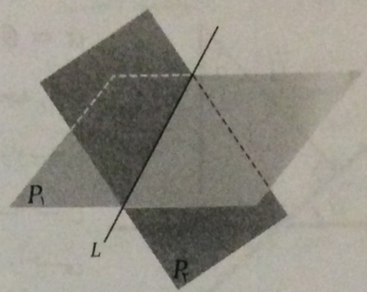
پس خط و صفحه، همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. نقطه برخورد این دو به صورت زیر است:

$$t = \frac{-۵}{۷} \to (x, y, z) = (\frac{-۳}{۷}, \frac{-۲۲}{۷}, \frac{-۳}{۷})$$

وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر: دو صفحه متمایز یا با هم موازیند یا همدیگر را قطع می‌کنند. اگر بردارهای قائم آنها موازی باشند، دو صفحه موازی و در غیر این صورت، متقاطع می‌باشند. قسمت مشترک دو صفحه متقاطع یک خط راست می‌باشد که به آن فصل مشترک دو صفحه می‌گویند. در مثال‌های بعدی روش به‌دست آوردن این خط مشترک را توضیح خواهیم داد.



دو صفحه موازی



دو صفحه متقاطع

مثال ۷: نشان دهید دو صفحه زیر با هم موازیند، سپس فاصله این دو صفحه را به‌دست آورید.

$$P_1: ۲x - ۴y + z = ۱۰ \ , \quad P_2: -۴x + ۸y - ۲z = ۳$$

حل: بردارهای قائم بر صفحه‌های P_1 و P_2 به صورت زیر می‌باشند:

$$\vec{n_1} = \langle ۲ , -۴ , ۱ \rangle \ , \ \vec{n_2} = \langle -۴ , ۸ , -۲ \rangle$$

و داریم:

$$\vec{n_2} = -۲\vec{n_1} \to \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \to P_1 \parallel P_2$$

برای به‌دست آوردن فاصله دو صفحه موازی کافی است یک نقطه دلخواه بر روی یکی از صفحه‌ها (مانند P_2) انتخاب و فاصله آن را تا صفحه دیگر (صفحه P_1) به‌دست آوریم.

$$(x = ۰ , y = ۰) \to -۴(۰) + ۸(۰) - ۲z = ۳ \to z = \frac{-۳}{۲}$$

$$\to A(۰ , ۰ , \frac{-۳}{۲}) \in P_2$$

$$P_1: ۲x - ۴y + z - ۱۰ = ۰$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{\left|۲(۰) - ۴(۰) - \frac{۳}{۲} - ۱۰\right|}{\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{۲۳}{۲\sqrt{۲۱}}$$

مثال ۸: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از مبداء مختصات مـی‌گـذرد و بـا صـفحه زیـر مـوازی باشـد.

$$۲x - y + ۳z = ۱$$

حل: اگر دو صفحه با هم موازی باشند بردار قائم بر یکی، بر صفحه دیگر نیز عمود است. بنابراین بردار $\vec{n} = \langle ۲ , -۱ , ۳\rangle$ ، بردار قائم بر صفحه مورد نظر اسـت پـس مـی‌تـوان نوشت:

$$a(x - x_.) + b(y - y_.) + c(z - z_.) = ۰$$

$$۲(x - ۰) - (y - ۰) + ۳(z - ۰) = ۰ \rightarrow ۲x - y + ۳z = ۰$$

مثال ۱۱: نشان دهید دو صفحه زیـر متقـاطع هسـتند و معادلـه فصـل مشـترک انهـا را به‌دست آورید.

$$P_۱: x + ۲y - z = ۰ \quad , \quad P_۲: ۲x + ۳y + z = ۵$$

حل: بردارهای قائم بر این دو صفحه عبارتند از:

$$\overrightarrow{n_۱} = \langle ۱ , ۲ , -۱\rangle \ , \ \overrightarrow{n_۲} = \langle ۲ ,۳ ,۱\rangle$$

چون $\frac{-۱}{۱} \neq \frac{۲}{۳} \neq \frac{۱}{۲}$ پس دو بردار $\overrightarrow{n_۱}$ و $\overrightarrow{n_۲}$ موازی نمی‌باشد در نتیجه دو صفحه متقاطع هستند. برای نوشتن معادله خط مشترک دو صفحه، نیاز به یک نقطه و یک بردار موازی خط داریم. با ضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{n_۱}$ و $\overrightarrow{n_۲}$ بردار موازی حاصل می‌شود.

((برای اینکه تصور بهتری از این مطلب داشته باشید کتاب خود را باز کرده و در زیـر یک طرف آن شی‌ای قرار دهید تا یک زاویه منفرجه بین صفحه‌های کتاب ایجاد شود. اکنون دو قلم را عمود بر دو صفحه کتاب در نظر بگیرید، مشاهده خواهید کرد ضـرب خارجی این بردارها (قلم‌ها) برداری موازی قسمت مشترک صفحه‌هـای کتـاب ایجـاد می‌کند)) .

$$\vec{n} = \vec{n_۱} \times \vec{n_۲} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۵\vec{i} - ۳\vec{j} - \vec{k}$$

برای یافتن یک نقطه از خط مشترک دو صفحه فرض می‌کنیم $x = ۰$ ، لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \xrightarrow{\text{در } P_۱} ۲y - z = ۰ \\ x = ۰ \xrightarrow{\text{در } P_۲} ۳y + z = ۵ \end{array}\right\} \to (y = ۱ , z = ۲) \to A(۰, ۱ ,۲) \in P_۱ \text{ و } P_۲$$

با داشتن امتداد خط یعنی $\vec{n} = \langle ۵ , -۳ , -۱ \rangle$ و یک نقطه از خط یعنی $(۰,۱,۲)$ می‌توان معادله فصل مشترک دو صفحه را نوشت:

$$\frac{x-۰}{۵} = \frac{y-۱}{-۳} = \frac{z-۲}{-۱} \to \frac{x}{۵} = \frac{۱-y}{۳} = ۲ - z$$

تمرین

۱- معادله صفحه گذرا از نقطه A و عمود بر بردار $\vec{n}$ را بنویسید.

۱) $A(۲ ,۳, ۰)$, $\vec{n} = \langle ۲ , ۱ , ۵ \rangle$

۲) $A(۱ ,۳, -۴)$, $\vec{n} = \langle ۲ , ۳ , ۰ \rangle$

۳) $A(۲ ,۳, ۵)$, $\vec{n} = \langle ۰ , ۰ , ۲ \rangle$

۲- سه نقطه دیگر از صفحه شامل نقطه A که بر بردار $\vec{n}$ عمود است را بنویسید.

$A(۰, ۲, ۰)$, $\vec{n} = \langle ۱ , \frac{۱}{۲} , \frac{-۱}{۳} \rangle$

۳- معادله صفحه گذرا از نقاط داده شده را بنویسید.

۱) $A(۲,۱ ,۰)$, $B(۴,۰,۲)$, $C(-۱,۱,۰)$

۲) $A(۰,۲ ,۰)$, $B(۱,۰,۰)$, $C(۰,۰,۳)$

۵- وضعیت خط و صفحه را نسبت به هم بررسی کرده و در صورت تقاطع، نقطه برخورد را به‌دست آورید.

۱) $P: ۲x - y + z = ۳$, $L: ۱ - x = y - ۲ = \frac{z-۳}{۳}$

۲) $P: ۲x - y + z = ۳$, $L: ۲ - x = y - ۳ = \frac{z-۱}{۳}$

۳) $P: ۲x - y + z = ۳$, $L: ۲ - x = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z}{۳}$

۱۳- معادله فصل مشترک صفحه‌های متقاطع زیر را به‌دست آورید.

۱) $P_۱: x + y - z = ۲$, $P_۲: x - y + z = ۴$

۲) $P_۱: x + y = ۱$, $P_۲: y + z = ۲$

۳) $P_۱: z = ۳$, $P_۲: ۲x - y = ۵$

۴) $P_۱: x = ۵$, $P_۲: y = ۳$

۱- معادله پارامتری یا متعارف خط‌های خواسته شده را بنویسید.

۱) خطی که از نقطه $(۲,۱,۰)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ موازی است.

۲) خطی که از نقطه $(۵,۴,۳)$ می‌گذرد و با محور zها موازی است.

۳) خطی که از نقطه $(۳,-۱,۴)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = ۴\vec{j} + ۳\vec{k}$ موازی است.

۴) خطی که از دو نقطه $A(۴,۳,۱)$ و $B(-۲,۰,۲)$ می‌گذرد.

۵) خطی که از نقطه $(۳,۵,۱)$ می‌گذرد و با خط زیر موازی است.

$(x = ۲t - ۳ \ , \ y = ۵t + ۱ \ , \ z = ۴ - ۳t)$

۸- فاصله نقطه A را از خط L به‌دست آورید.

۱) $L: \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{z+۲}{۳} \quad , \quad A(۲,۰,۱)$

۲) $L: x - ۱ = \frac{y+۲}{-۲} = \frac{z+۱}{۳} \quad , \quad A(۵,۰,-۴)$

۹- مقادیر r و s را چنان تعیین کنید که نقطه $(r,s,۲)$ بر روی خط گذرا از دو نقطه $(۲,۵,۷)$ و $(۰,۳,۲)$ واقع باشد.

۱۰- نشان دهید دو خط زیر موازی هستند، سپس فاصله دو خط را به‌دست آورید.

$L_۱: \frac{x-۳}{۲} = \frac{y+۱}{۴} \; ، \; z = ۵ \quad , \quad L_۲: \frac{۲x-۱}{۴} = \frac{y-۵}{۴} \; ، \; z = ۲$

۱۱- نشان دهید دو خط زیر متقاطع می‌باشند، سپس نقطه برخورد و زاویه بین دو خط را بیابید.

$L_۱: \frac{x+۲}{۲} = \frac{y}{-۳} = \frac{z+۱}{۵} \quad , \quad L_۲: \frac{x+۲}{۳} = \frac{y}{۲} = \frac{z+۱}{۴}$

۱۲- وضعیت دو خط زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

$L_۱: x - ۱ = \frac{y+۲}{\ } = ۴ - z \quad , \quad L_۲: \frac{x}{\ } = y - ۳ = \frac{z+۳}{\ }$

منبع رياضي عمومي۲تاليف آقاي كرايه چيان