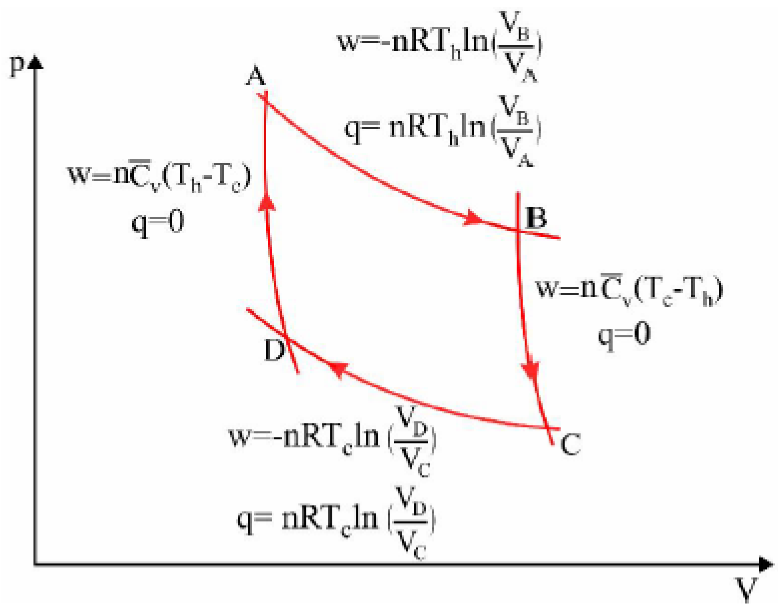
چرخه کارنو و راندمان آن از دیدگاه عامل کار (Agent Work)

در این بخش نحوه کارکرد ماشین گرمایی کارنو را از دیدگاه عامل کار (مثلا n مول از یک گاز ایده‌آل) بررسی می‌کنیم. این موضوع در شکل ۵-۳ نمایش داده شده است. این گاز ایده آل، طی چهار مرحله انبساط - تراکم به نقطه شروع خود می رسد (چرخه). این مراحل عبارت اند از:



شکل ۵-۳ سیکل چهار مرحله ای کارنو (نمودار p-V).

۱- مرحله A→B : انبساط همدمای برگشت پذیر (گاز در اثر انبساط سرد میشود ولی آن را در تماس با منبع گرم با دمای T_h قرار داده تا انبساط به صورت همدما انجام شود).

۲- مرحله B→C: انبساط آدیاباتیک برگشت پذیر (تماس گاز از منبع گرم قطع شده و ضمن شرکت آن در یک انبساط آدیاباتیک، آن را تا دمای T_c ، دمای منبع سرد، خنک می‌کنیم).

۳- مرحله C⟶D: تراکم هم دمای برگشت پذیر، (گاز در اثر تراکم گرم میشود ولی آن را در تماس با منبع سرد با دمای T_c قرار داده تا تراکم آن به صورت هم دما پیش رود).

۴- مرحله D⟶A : تراکم آدیاباتیک برگشت پذیر (تماس گاز از منبع سرد قطع شده و در اثر شرکت آن در یک تراکم آدیاباتیک، آن را تا دمای T_h، دمای منبع گرم، گرم می‌کنیم).

نکته: چون گاز ایده آل است و انرژی درونی آن فقط تابع دماست؛ در مراحل اول و سوم که دما ثابت است، $\Delta U = ۰$؛ بنابراین طبق قانون اول $\Delta U = q + \omega = ۰$ یا $q = -\omega$ و چون $\omega = -nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$؛ پس $q = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$. چون مراحل دوم و چهارم آدیاباتیک است؛ $q = ۰$ و طبق قانون اول $\Delta U = q + \omega$ یا $q = \omega$؛ از این رو $\omega = n\bar{C}_V\left(T_f - T_i\right)$.

نکته: در یک چرخه $\Delta U_{کل} = ۰$ ؛ از این رو :

$$\Delta U_{A\to B} + \Delta U_{B\to C} + \Delta U_{C\to D} + \Delta U_{D\to A} = ۰$$

$$\omega_{A\to B} + q_{A\to B} + \omega_{B\to C} + q_{B\to C} + \omega_{C\to D} + q_{C\to D} + \omega_{D\to A} + q_{D\to A} = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{آدیاباتیک}]{q_{B\to C}=q_{D\to A}=۰}\xrightarrow[\text{قرینه}]{\omega_{B\to C}+\omega_{D\to A}=۰} \omega_{A\to B} + q_{A\to B} + \omega_{C\to D} + q_{C\to D} = ۰$$

پس فقط مراحل اول و سوم در کار و گرما دخیل‌اند. برای سادگی قرار می‌دهیم $\omega_{A\to B} + \omega_{C\to D} = \omega^*_{max}$ و $q_{A\to B} = q_h, q_{C\to D} = q_c$. به این ترتیب:

$$\omega^*_{max} + q_h + q_c = ۰ \quad \text{یا} \quad q_h + q_c = -\omega^*_{max} \qquad (۵\text{-}۴۲)$$

نکته: همان طور که قبلا نیز گفته شد، چون $q_h > ۰, q_c < ۰, \omega^*_{max} < ۰$، بنابراین رابطه (۵-۴۲) همان رابطه $|\omega^*_{max}| = |q_h| - |q_c|_{\min}$ است؛ زیرا $|\omega^*_{max}| = -\omega^*_{max}$ و $|q_c|_{\min} = (q_c)_{\min} = -q_c$ و $|q_h| = q_h$.

اینک طبق تعریف ، راندمان برابر خواهد بود با:

$$\varepsilon = \frac{-\omega^{*}_{\max}}{q_{\mathrm{h}}} = \frac{q_{\mathrm{h}}+q_{\mathrm{c}}}{q_{\mathrm{h}}} = ۱ + \frac{q_{\mathrm{c}}}{q_{\mathrm{h}}} \qquad (۵\text{-}۴۳)$$

نکته: اگر به جای T_C, T_h ، مقادیر q_c, q_h در اختیار باشد، باید از رابطه (۵-۴۳) برای محاسبه ε استفاده کرد (با شرط $q_c < ۰$)

نکته: روابط (۵-۴۳) و (۵-۴۱) هم ارزند؛ زیرا طبق روابط $T - V$ برای انبساط آدیاباتیک – برگشت‌پذیر (مراحل دوم و چهارم) داریم:

$$\begin{cases} \mathrm{T_c V_C^{\gamma-۱}} = \mathrm{T_h V_B^{\gamma-۱}} \\ \mathrm{T_c V_D^{\gamma-۱}} = \mathrm{T_h V_A^{\gamma-۱}} \end{cases} \longrightarrow \frac{\mathrm{V_C}}{\mathrm{V_D}} = \frac{\mathrm{V_B}}{\mathrm{V_A}} \qquad (۵\text{-}۴۴)$$

[از روی سه حجم می توان چهارمین حجم را محاسبه کرد. (حاصل ضرب حجم‌های مقابل در شکل ۵-۳ مساوی‌اند)]

$$\varepsilon = \frac{q_{\mathrm{h}}+q_{\mathrm{c}}}{q_{\mathrm{h}}} = ۱ + \frac{q_{\mathrm{c}}}{q_{\mathrm{h}}} = ۱ + \frac{nRT_{\mathrm{c}}\ln\left(\frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{C}}}\right)}{nRT_{\mathrm{h}}\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)} = ۱ - \frac{T_{\mathrm{c}}\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)}{T_{\mathrm{h}}\ln\left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)} = ۱ - \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{h}}} \qquad (۵\text{-}۴۵)$$

نکته: کار خالص انجام شده در چرخه کارنو (مراحل ۱ و ۲) به کمک (۵-۴۴) عبارت است از:

$$\omega = -nRT_h\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nRT_c\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nR(T_c - T_h)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \qquad (۵\text{-}۴۶)$$

بنابر این نوع گاز (تک اتمی، دو اتمی و ...) تأثیری بر کار ماشین ندارد.

نتیجه اساسی چرخه کارنو

چون معادلات (۵-۴۳) و (۵-۴۵) هم ارزند، پس:

(۵-۴۷)

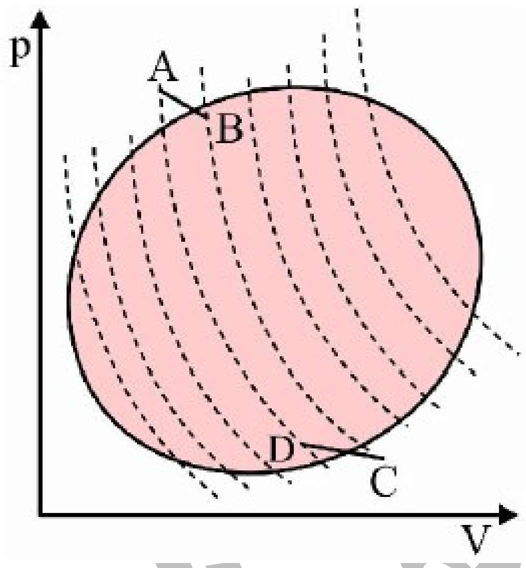
$$1 + \frac{q_c}{q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \rightarrow$$

$$\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_h}{T_h} = 0$$

به این ترتیب چنانچه شکل ۵-۴ را با رسم خطوط نقطه چین، به تعداد زیادی (n) چرخه کارنوی دیفرانسیلی تبدیل کرده و روی مرز چرخه مفروض، هم دماها را جدا کنیم، در این صورت با استفاده از نتیجه (۵-۴۷) به صورت دیفرانسیلی بر روی هر یک از این چرخه های کوچک داریم:

(۵-۴۸)

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta q_c}{T_c} + \frac{\delta q_h}{T_h}\right) = 0_{\text{چرخه۱}} \\ \left(\frac{\delta q_c}{T_c} + \frac{\delta q_h}{T_h}\right) = 0_{\text{چرخه۲}} \\ \vdots \\ \left(\frac{\delta q_c}{T_c} + \frac{\delta q_h}{T_h}\right) = 0_{\text{چرخه۳}} \end{cases} \longrightarrow \sum \left(\frac{\delta q_{rev}}{T}\right) = 0$$



شکل ۵-۴ تبدیل چرخه p - V به تعداد بیشماری چرخه کارنوی دیفرانسیلی. خطوط AB و CD هم دما و خطوط BC و DA آدیابات هستند.

حال هرچه تعداد آدیابات‌ها بیشتر شود (پهنای بین آنها کمتر شود)، مجموع در رابطه (۵-۴۸) به مجموع ریمان (انتگرال) نزدیک تر می شود؛ بنابراین با حد گرفتن می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum \left(\frac{\delta q}{T}\right) = \qquad (۵\text{-}۴۹)$$

$$۰ \quad \text{یا} \quad \oint \frac{\delta q_{rev}}{T} = ۰$$

به این ترتیب رابطه (۵-۴۹) نتیجه نهایی مطلوب است؛ از این رو باید دیفرانسیل تابع حالتی به صورت $\frac{\delta q_{rev}}{T}$ موجود باشد که انتگرال چرخهای آن صفر باشد. این رابطه را با $dS = \frac{\delta q_{rev}}{dT}$ نشان داده و به S ، آنتروپی سیستم گویند.

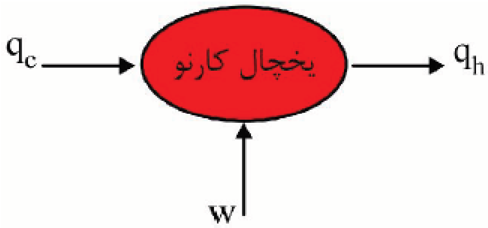
قضیه کلازیوس

اگر ماشین به جای برگشت پذیر به صورت برگشت ناپذیر کار کند، در این صورت رابطه (۵-۴۹) به صورت $\oint \frac{\delta q_{rev}}{T} < ۰$ درمی‌آید؛ بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت $\oint \frac{\delta q_{rev}}{T} \leq ۰$ که علامت تساوی مربوط به برگشت پذیری و علامت کوچکتر مربوط به برگشت‌ناپذیری است.

یخچال کارنو

طرح یک یخچال کارنو به صورت زیر است. عملکرد خالص یخچال ها گرفتن گرما از منبع سرد و دادن آن به منبع گرم است. البته طبق قانون دوم باید این فرایند با انجام کار همراه باشد؛ از این رو طبق قرارداد علامت‌ها می‌توان نوشت:

$$-q_h = \omega + q_c \quad \text{یا} \quad \omega = q_h - q_c \qquad (۵-۵۰)$$



شکل ۵-۵ طرح شماتیک یک یخچال کارنو .

اگر راندمان یخچال را به صورت نسبت کار انجام شده توسط یخچال به گرمایی که از منبع سرد دریافت می کند، تعریف کنیم؛ داریم

$$\varepsilon = \frac{\omega}{q_c} = \frac{-q_h - q_c}{q_c} = \frac{T_h - T_c}{T_c} \qquad (۵-۵۱)$$

نکته: به شباهت این رابطه با معادله (۵-۴۱) توجه کنید، با این تفاوت که در مخرج (۵-۵۱) به جای T_c, T_h آمده است.

نتیجه: طبق رابطه (۵-۵۱) ، می توان حالات زیر را در نظر گرفت:

$$\text{۱) اگر}\ T_h - T_c > T_c \quad \text{یا} \quad T_h > ۲T_c \quad \text{یا} \quad T_c < \frac{۱}{۲}T_h \rightarrow \varepsilon > ۱$$

$$\text{۲) اگر}\ T_h - T_c = T_c \quad \text{یا} \quad T_h = ۲T_c \quad \text{یا} \quad T_c = \frac{۱}{۲}T_h \rightarrow \varepsilon = ۱$$

$$\text{۳) اگر}\ T_h - T_c < T_c \quad \text{یا} \quad T_h < ۲T_c \quad \text{یا} \quad T_c < \frac{۱}{۲}T_h \rightarrow \varepsilon < ۱$$

با تعریف (۵-۵۱) به عنوان بازده یخچال، می توان یخچال هایی با راندمان بیش از ۱۰۰٪ نیز داشت.

ضریب عملکرد یخچال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۵-۵۲)

$$\varepsilon' = \frac{q_c}{\omega}$$

در این مورد تمام روابط قبل، معکوس می شود؛ یعنی:

(۵-۵۳)

$$\varepsilon' = \frac{q_c}{q_h - q_c} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

پس حالات زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر $T_c > T_h - T_c$ یا $۲T_c > T_h$ یا $T_c > \frac{۱}{۲}T_h \to \varepsilon' > ۱$

۲) اگر $T_c = T_h - T_c$ یا $۲T_c = T_h$ یا $T_c = \frac{۱}{۲}T_h \to \varepsilon' = ۱$

۳) اگر $T_c < T_h - T_c$ یا $۲T_c < T_h$ یا $T_c < \frac{۱}{۲}T_h \to \varepsilon' < ۱$

مثال: شکل ۵-۶ یک ماشین گرمایی کارنو را نشان میدهد که یک یخچال کارنو را به کار می اندازد. مقدار q'_h چقدر است؟

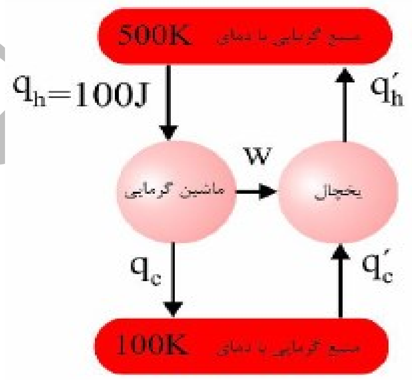
می توان در این ماشین ترکیبی (هیبریدی) نوشت:

(ماشین گرمایی) $\varepsilon = \frac{T_h - T_c}{T_h} = \frac{۵۰۰-۱۰۰}{۵۰۰} = ۰.۸ = -\frac{\omega}{q_h} = -\frac{\omega}{۱۰۰} \to \omega = -۸۰J$

(یخچال) $\varepsilon = \frac{T_h - T_c}{T_c} = \frac{۵۰۰-۱۰۰}{۱۰۰} = ۴ = +\frac{\omega}{q'_c} = \frac{+۸۰}{q'_c} \to q'_c = ۲۰J$

توجه کنید، طبق شکل، ω برای ماشین گرمایی منفی است، در حالی که همین ω برای یخچال مثبت است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$q'_h = \omega + q'_c \to q'_h = ۸۰ + ۲۰ = ۱۰۰J$



شکل ۵-۶ ترکیب ماشین گرمایی کارنو و یخچال کارنو[1].

[1] برای مشاهده مسایل بیشتری از این نوع می‌توانید به این منبع مراجعه کنید:
نظریه و مسایل شیمی فیزیک، کلاید.ر. متز، ترجمه: دکتر سید علی اکبر سالاری، انتشارات امیر کبیر.